



Sistemler ve Sinyaller



Ders 8

Fourier Transform

Doç Dr. Yunus Eği

Fourier Serilerinin Özellikleri

1.) Doğrusallık

$x(t)$ ve $y(t)$, aynı T periyoduna sahip iki periyodik sinyali gösterebilir, öyle ki

$$\begin{aligned} x(t) &\overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k, \\ y(t) &\overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k. \end{aligned}$$

Burada $\overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow}$ Fourier Serisi gösterimini gösterir

İki sinyalin herhangi bir doğrusal kombinasyonu da T periyodu ile periyodik olacaktır, örneğin

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k.$$

Fourier Serilerinin Özellikleri

2.) Zaman Kaydırma

Verilen

$$y(t) = x(t - t_0)$$

FS katsayısı

$$b_k = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

Sinyalin T periyodu korunur

3.) Zamanın Tersine Çevrilmesi

Verilen

$$y(t) = x(-t)$$

FS katsayısı

$$b_k = a_{-k}$$

Sinyalin T periyodu korunur

4.) Zaman Ölçeği

Verilen

$$y(t) = x(\alpha t)$$

FS katsayısı

$$b_k = a_k$$

Sinyalin periyodu T/a'dır

Fourier Serilerinin Özellikleri

5.) Farklılaşma

Verilen

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

FS katsayısı

$$b_k = jk\omega_0 a_k$$

6.) Parseval İlişkisi

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2,$$

$x(t)$ 'nin Ortalama Gücü

$|a_k|^2 = k.$ harmonikteki ortalama güç

TABLE 3.1 PROPERTIES OF CONTINUOUS-TIME FOURIER SERIES

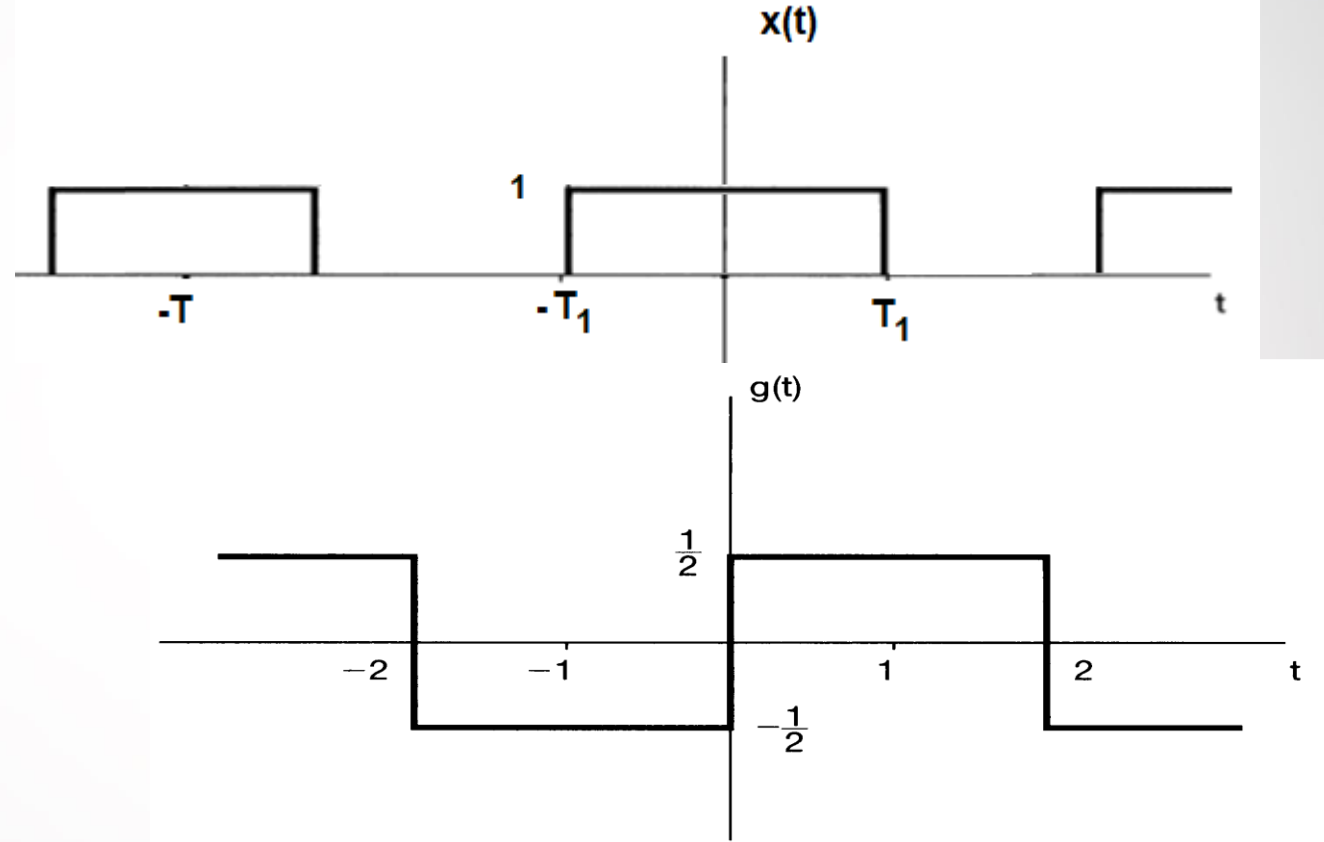
Property	Section	Periodic Signal	Fourier Series Coefficients
		$\left. \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array} \right\} \text{ Periodic with period } T \text{ and}$ $\text{fundamental frequency } \omega_0 = 2\pi/T$	a_k b_k
Linearity	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Frequency Shifting		$e^{jM\omega_0 t} x(t)$	a_{k-M}
Time Reversal	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Time Scaling	3.5.4	$x(\alpha t), \alpha > 0$ (periodic with period T/α)	a_k
Multiplication	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
Differentiation		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk \frac{2\pi}{T} a_k$

Örnek 3.6

Verilen: $x(t)$, temel periyot T ve FS katsayılarına sahip periyodik bir sinyaldir.

$$a_0 = \frac{2T_1}{T}, a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}.$$

FS tablosunu kullanarak $g(t)$ nin FS katsayıları olan d_k yı bulma.



Örnek 3.6

Çözüm

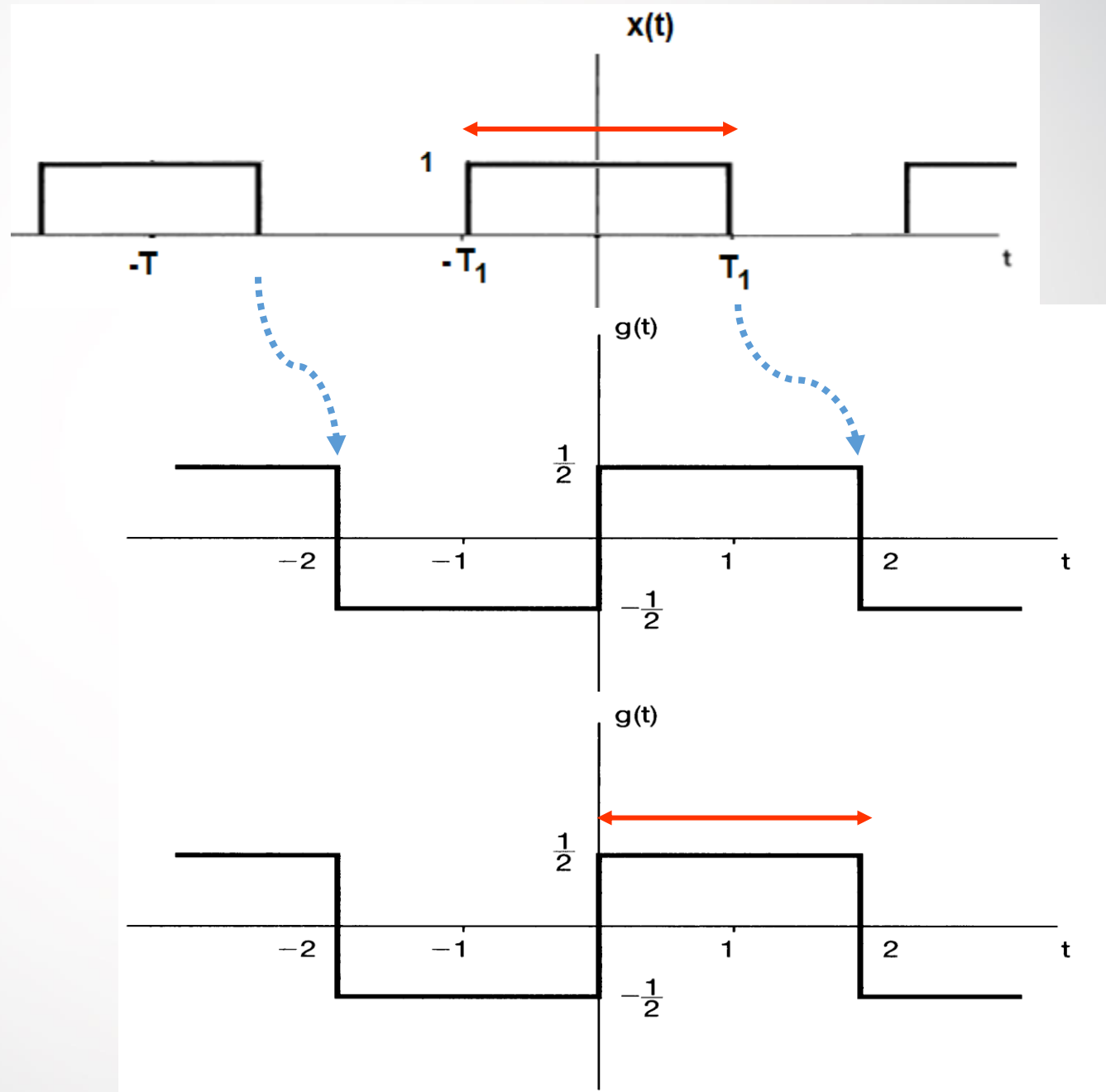
$g(t)$ 'nin, $x(t)$ 'nin sağa ve aşağı kaydırılmasıyla elde edildiğine dikkat edin

$x(t)$ ve $g(t)$ aynı T periyoduna sahiptir
 $g(t)$ 'nin kenarlarını karşılaştırırsak, $T=4$ olur

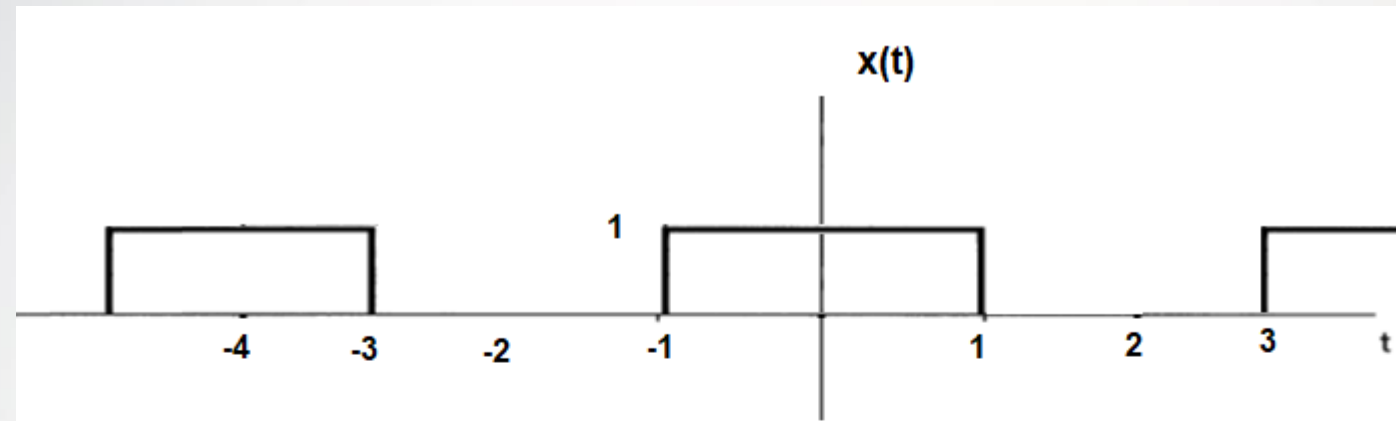
Genlik genişliğini kıyaslarsak

$$2T_1=2$$

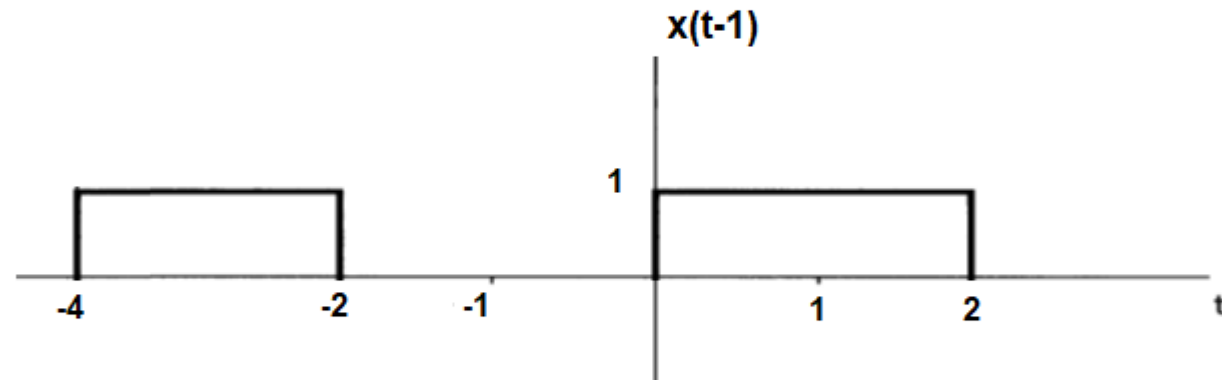
$$T_1=1$$



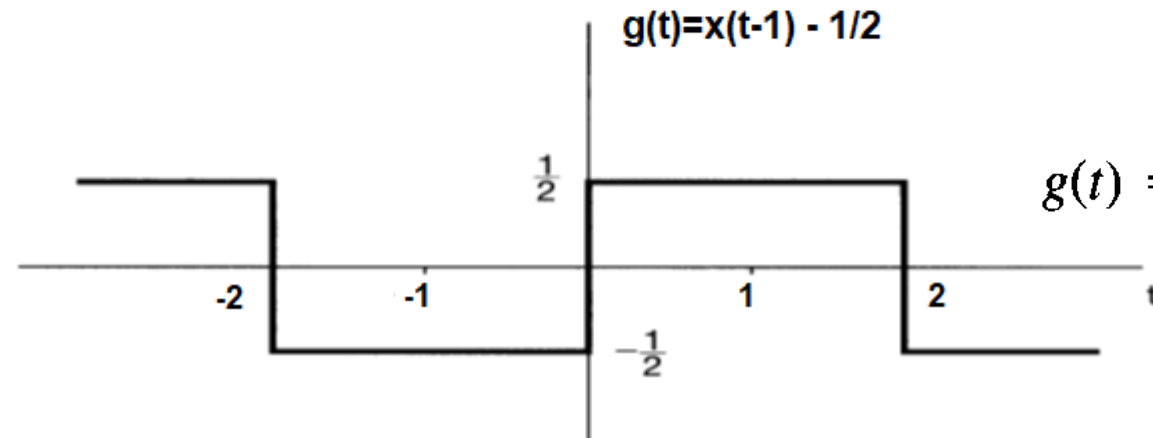
1. $x(t)$ ile
başlayarak



2. "1" ile sağa
kaydırın



3. "1/2" oranında
kaydırın



4. $g(t)$ elde edin

$$g(t) = x(t - 1) - 1/2.$$

Örnek 3.6

Fourier Serisi
Katsayıları

$$g(t) = x(t - 1) - 1/2.$$



$$d_k = b_k - c_k$$

Time-shift özelliğini kullanma $x(t-1) \rightarrow b_k$

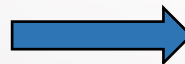
$$b_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2} & \text{for } k \neq 0 \\ a_0 & \text{for } k = 0 \end{cases}.$$

Bir sabitin Fourier Serisi katsayıları

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{for } k \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{for } k = 0 \end{cases}.$$

Bunu takip eder: $d_k = b_k - c_k$

$$d_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2}, & \text{for } k \neq 0 \\ a_0 - \frac{1}{2}, & \text{for } k = 0 \end{cases},$$



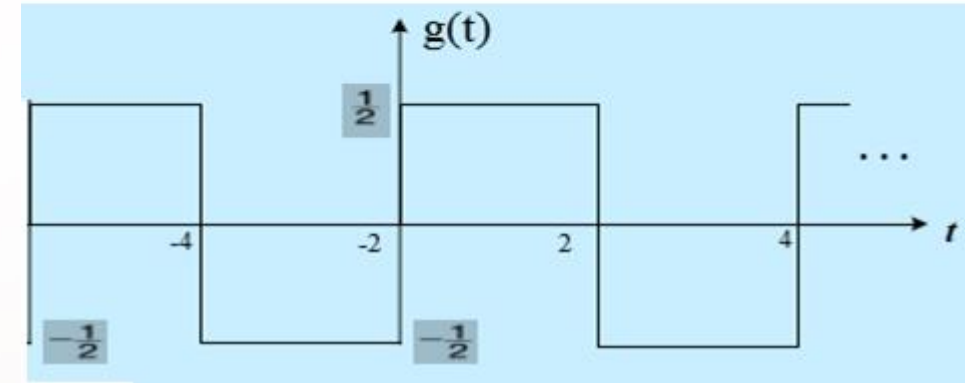
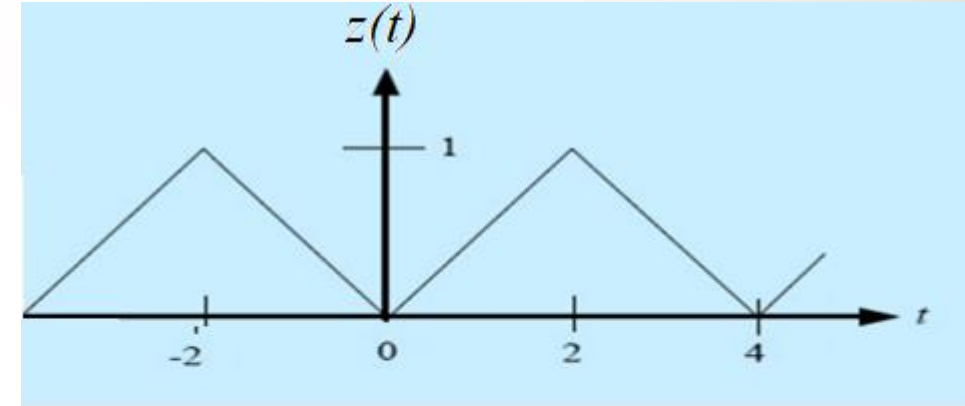
$$d_k = \begin{cases} \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2}, & \text{for } k \neq 0 \\ 0, & \text{for } k = 0 \end{cases}$$

Örnek 3.7

$T = 4$ periyodu ile üçgen dalga sinyali $z(t)$ 'yi düşünün

Fourier serisi katsayılarını e_k yı bulun

Önceki örnekten $g(t)$ kullanabilirsiniz



Örnek 3.7

Bu sinyalin türevi, Örnek 3.6'daki $g(t)$ sinyalidir.

$$g(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

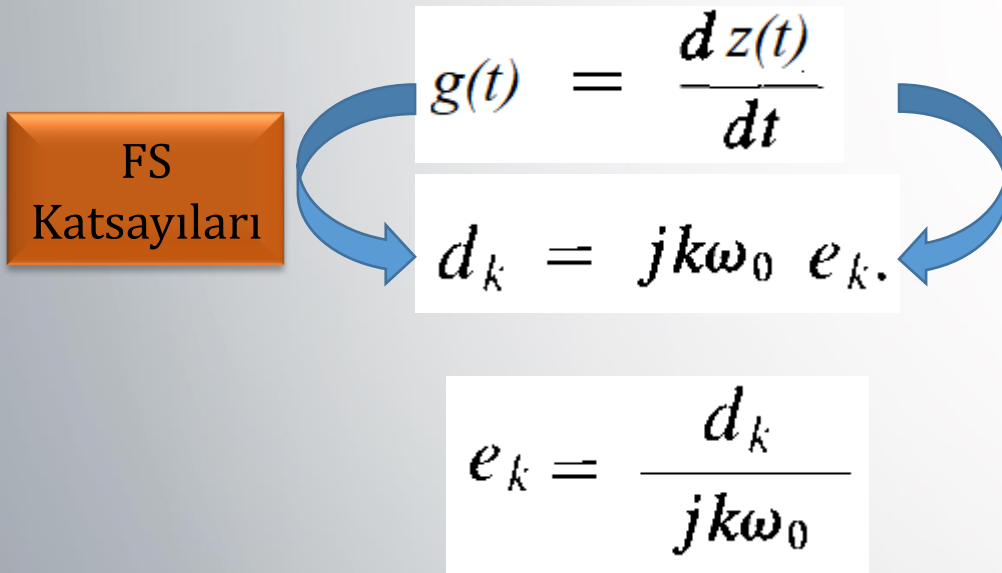
Temel frekans $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/2$

Bu sinyalin türevi, Örnek 3.6'daki $g(t)$ sinyalidir.

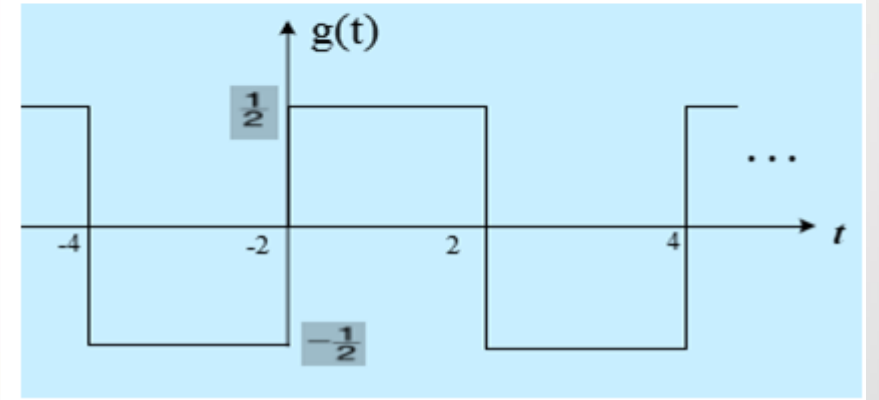
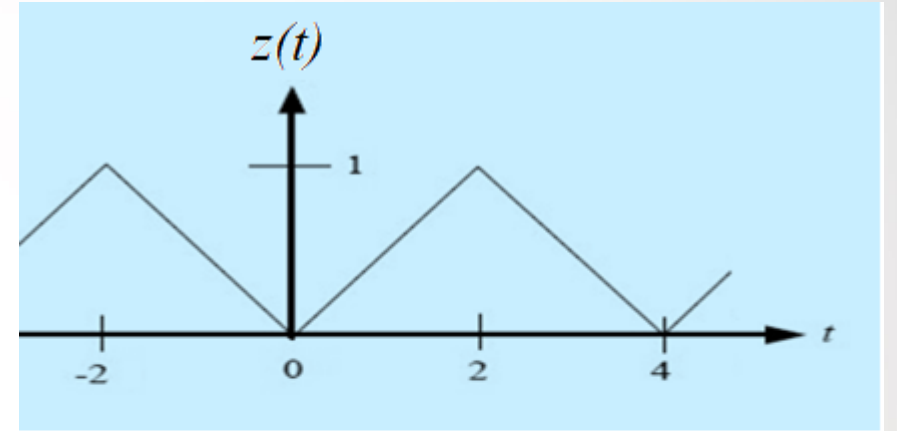
$$g(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

$g(t)$ 'nin Fourier katsayılarını şu şekilde belirtin: d_k and $z(t)$ yide e_k

Fourier serisi özellikleri Tablosundan



Bu denklem elde etmek için e_0 kullanılamaz



Örnek 3.7

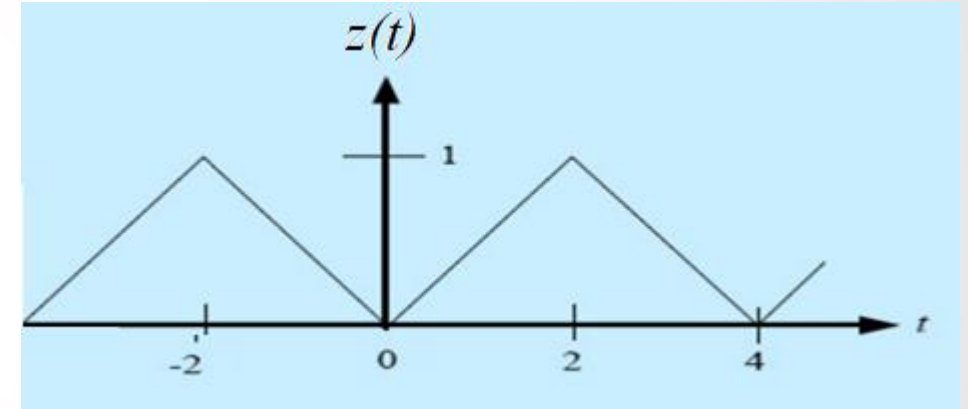
$$e_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$e_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z(t) dt = \frac{1}{2}$$

e_0 , $x(t)$ 'nin T ile bölünmesinin bir periyodundan altındaki alandır.

$z(t)$ için Fourier serisi şu şekilde verilir: (Not: dk örnek 3.6'dan elde edilmiştir)

$$e_k = \begin{cases} \frac{2 \sin(\pi k/2)}{j(k\pi)^2} e^{-jk\pi/2}, & \text{for } k \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{for } k = 0 \end{cases}$$



$$e_k = \frac{d_k}{jk\omega_0}$$

Fourier Dönüşümü Analizi

Hedef

- Sürekli aperiodyk sinyaller için Fourier dönüşümünü inceleyin
- Frekans alanında zaman alanı sinyalini analiz edin (frekans bileşenleri)
- Fourier dönüşümü, Laplace dönüşümünün genelleştirilmiş bir durumudur

- Laplace dönüşümü şu şekilde tanımlanır:

$$X(s) = L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$



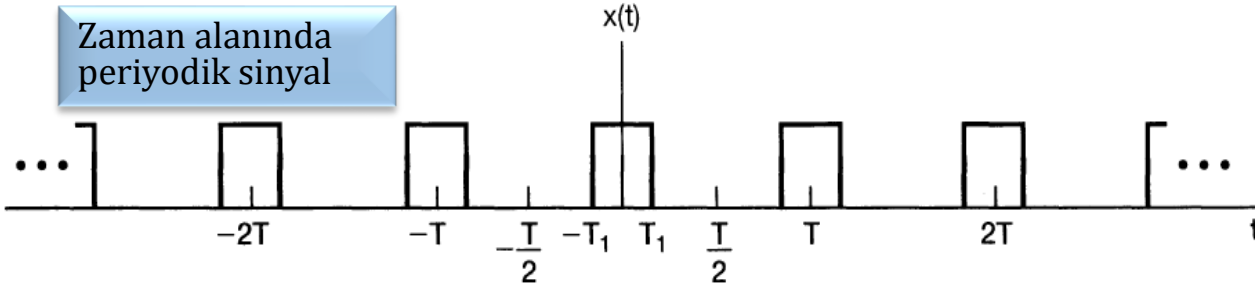
- ExplaineLaplace dönüşümü şu şekilde tanımlanır:d in linear circuits II

Fourier dönüşümü (FT) şu şekilde tanımlanır:

$$X(\omega) = \text{FT}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

Fourier Serilerinden Sürekli Fourier Dönüşümüne

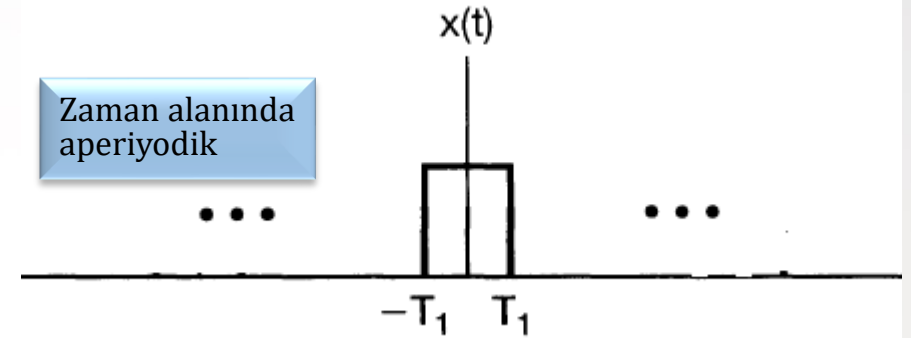
Zaman alanında periyodik sinyal



FS
katsayıları
k

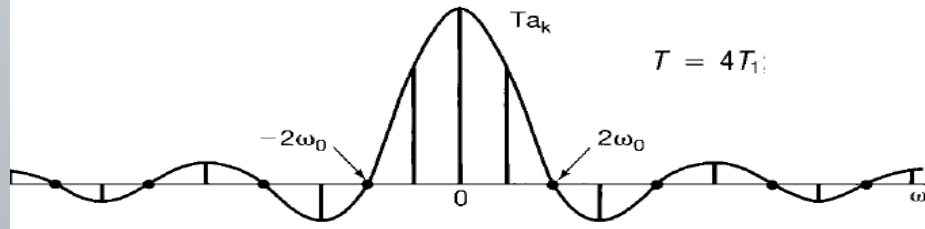
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Zaman alanında aperiodyk

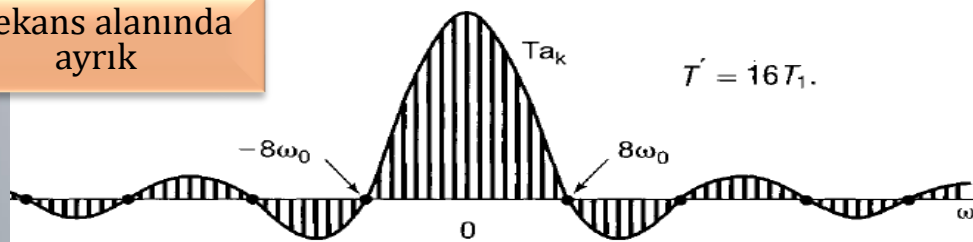


Fourier
dönüşümü
 $X(\omega)$

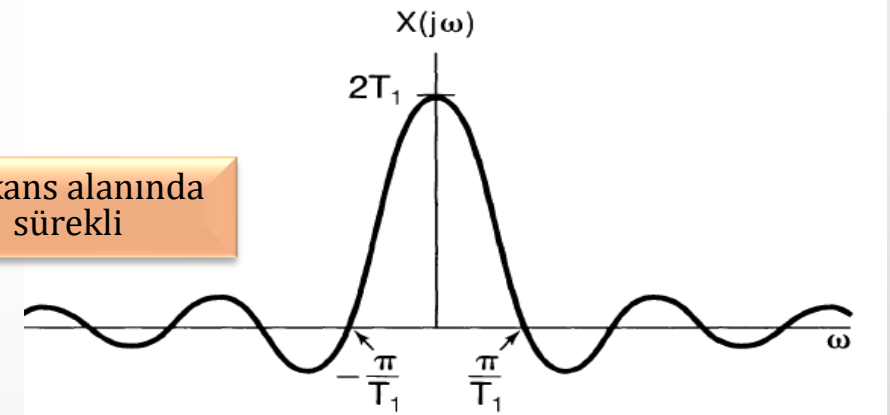
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$



Frekans alanında ayırık



Frekans alanında sürekli



Fourier Dönüşümü Analizi

- Fourier Dönüşümü şu şekilde verilir:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

- Ters Fourier dönüşümü şu şekilde verilir:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Örnek

- FT'yi bulun

- Unutmayın ki



$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0.$$

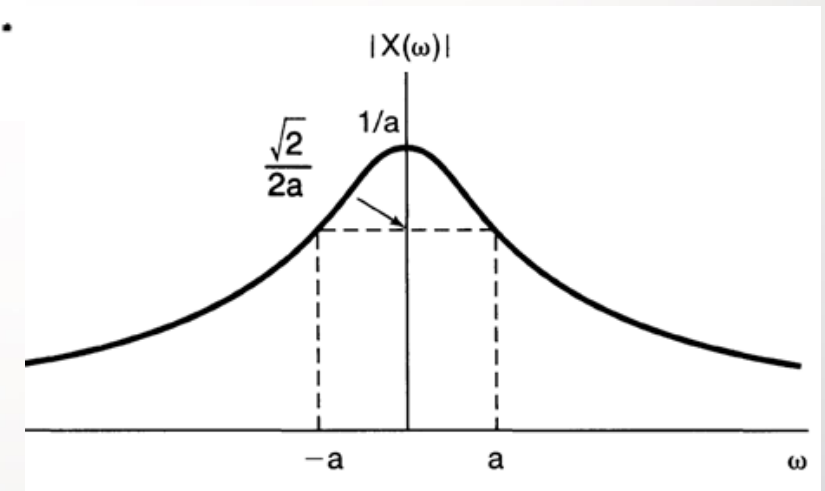
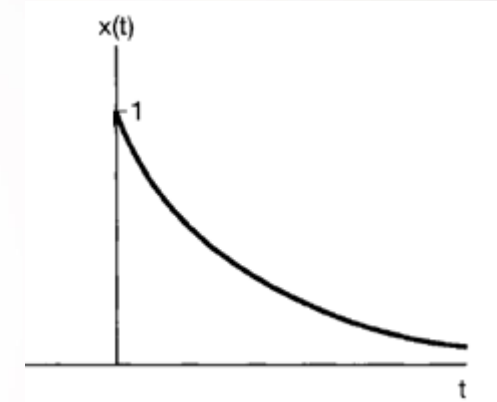
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

- Çözüm:

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \bigg|_0^{\infty}.$$

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0.$$

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}},$$



Fourier Dönüşümü Analizi

Örnek 4.2

Aşağıdakilerin FT'sini bulun:

$$x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{at} & t < 0 \\ e^{-at} & t > 0 \end{cases}$$

• Çözüm:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} \\ &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

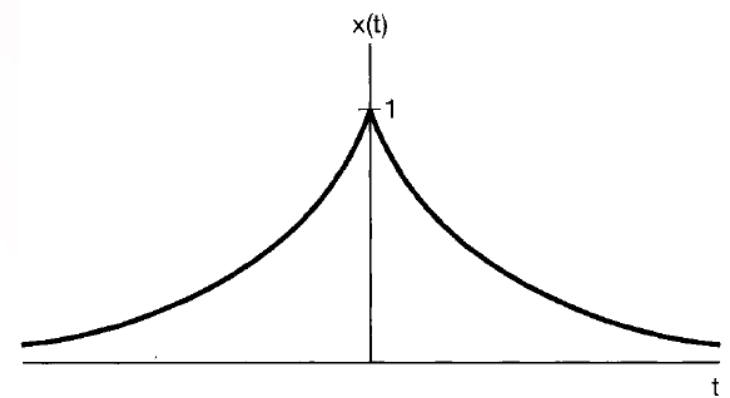
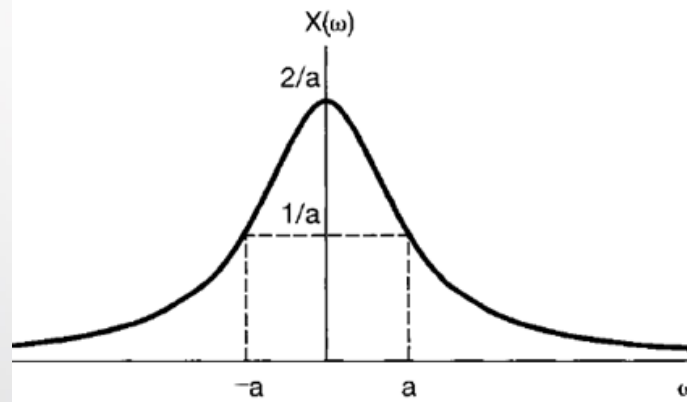


Figure 4.6 Signal $x(t) = e^{-a|t|}$ of Example 4.2.



Fourier Dönüşümü Analizi

Örnek 4.4

Aşağıdakilerin FT'sini bulun:

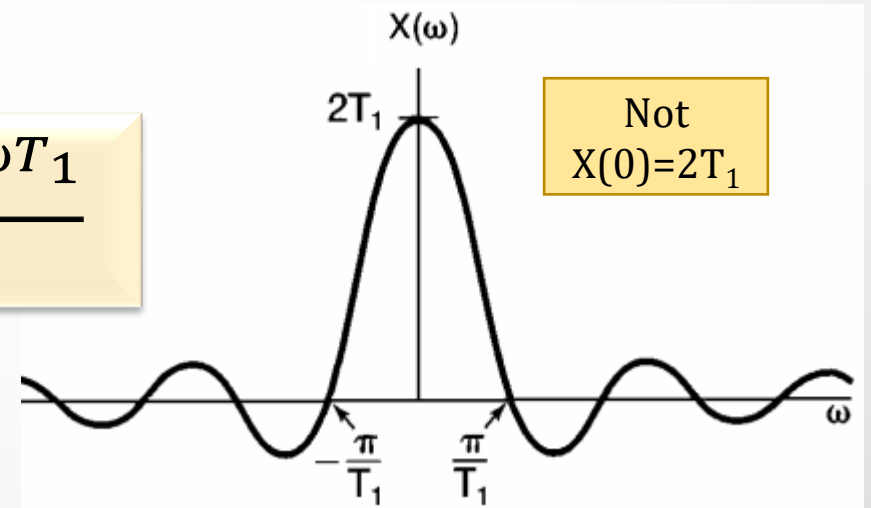
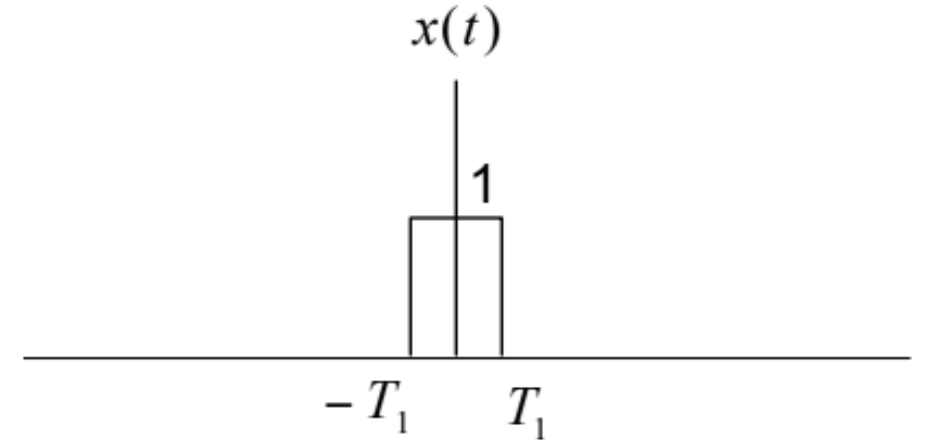
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

• Çözüm:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

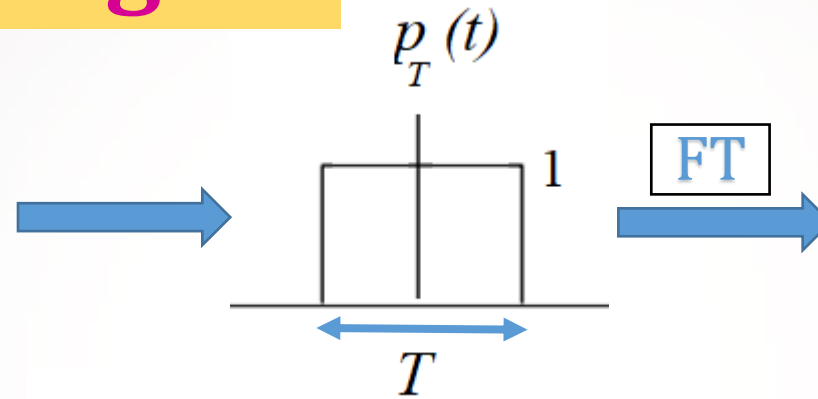
$$X(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} 1 e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}}{-j\omega}$$

$$X(\omega) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}$$



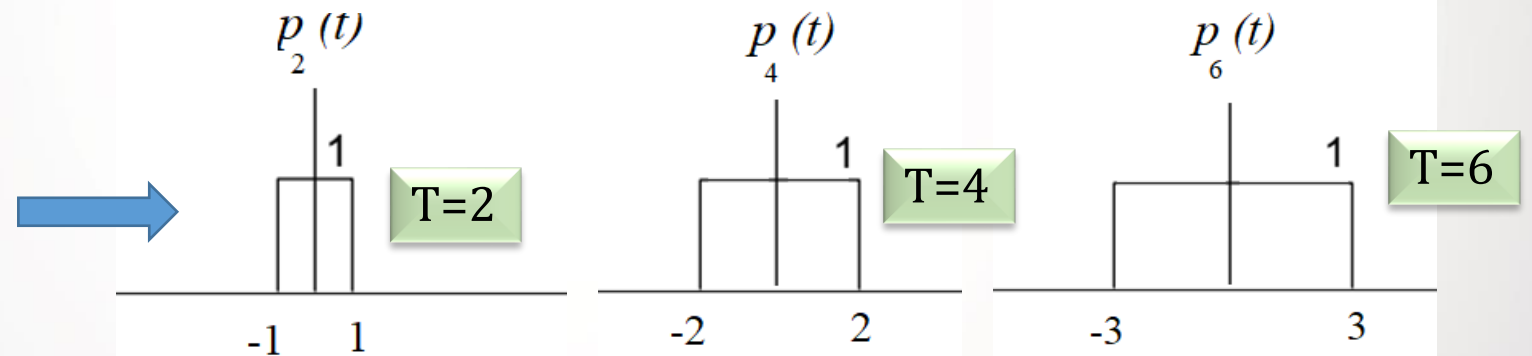
Pulse signal

Pulse signals is defined as $p_T(t)$, where T is the width of the pulse

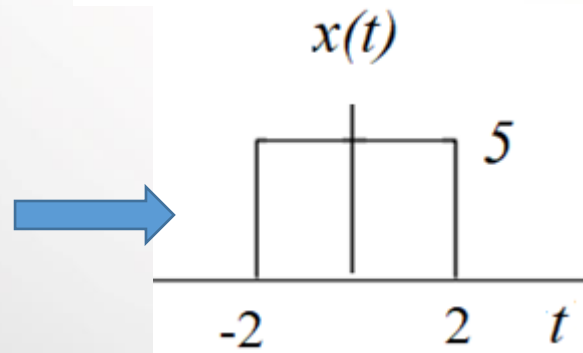


$$P_T(\omega) = \frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega}$$

Three examples are given where



Example: Write $x(t)$ in terms of $p(t)$



$$x(t) = 5 p_4(t)$$

Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Doğrusallık:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$$

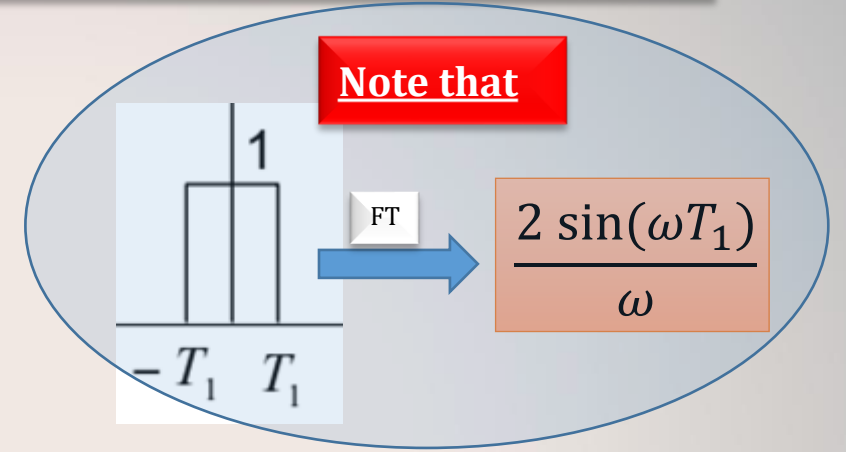
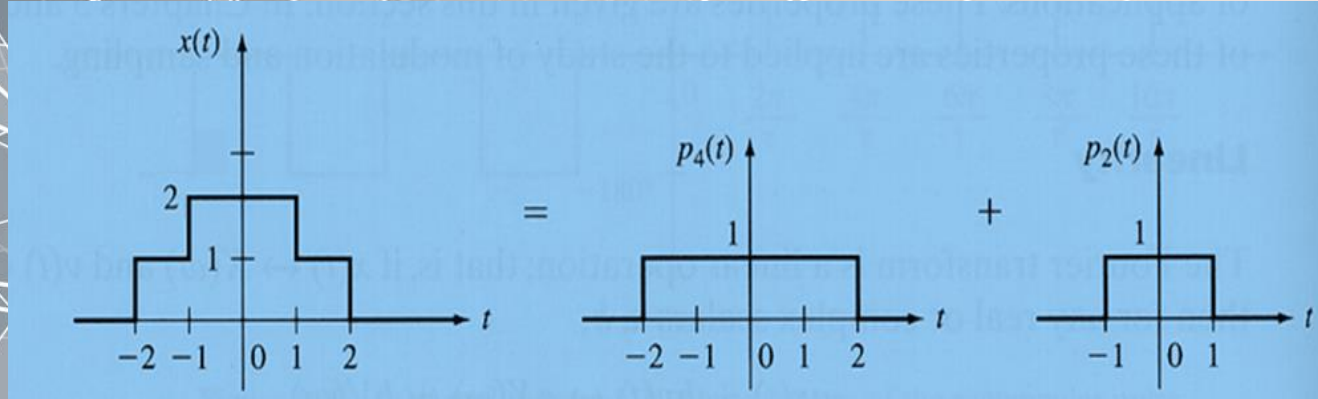
$$\alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)$$

Zaman kayması:

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Örnek: Doğrusallık

$x(t)$ sinyali için Fourier dönüşümünü bulun



$x(t)$ 'nin şu şekilde yazılabileceğini unutmayın:

$$x(t) = p_4(t) + p_2(t)$$

0 zaman Fourier Dönüşümü

$$X(\omega) = P_4(\omega) + P_2(\omega)$$

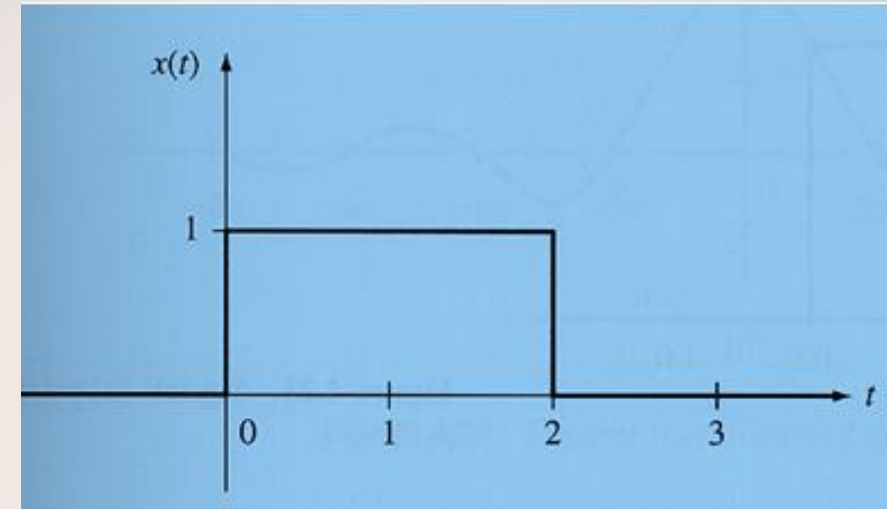
$p_4(t)$ için $T_1 = 2$
 $p_2(t)$ için $T_1 = 1$

$$X(\omega) = \frac{2 \sin(2\omega)}{\omega} + \frac{2 \sin(\omega)}{\omega}$$

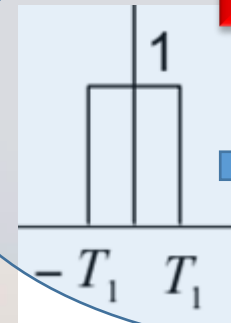
Example: Time Shift

$$x(t) = p_2(t-1)$$

$$X(\omega) = \frac{2\sin(\omega)}{\omega} e^{-j\omega}$$



Note that



FT

$$\frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}$$

Örnek 4.9

- $x(t)$ 'yi $p_1(t)$ ve $p_3(t)$ 'nin bir fonksiyonu olarak yazın

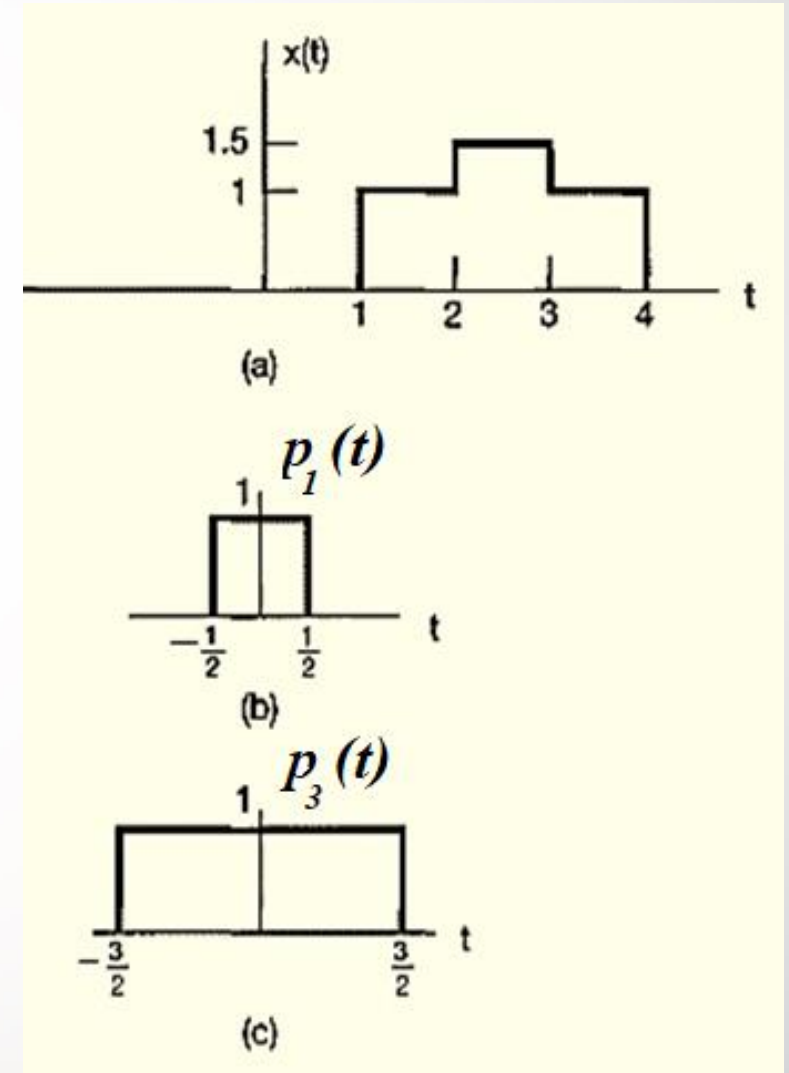
$$x(t) = 0.5 p_1(t - 2.5) + p_3(t - 2.5)$$

- Fourier dönüşümünün doğrusallık ve zaman kayması özelliklerini kullanmak

$$X(\omega) = 0.5 P_1(\omega)e^{-j2.5\omega} + P_3(\omega)e^{-j2.5\omega}$$

- Burada $p_1(t)$ ve $p_3(t)$ 'nin Fourier dönüşümü

$$P_1(\omega) = \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega} \text{ and } P_3(\omega) = \frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega}$$



Zaman İçinde Farklılaşma:

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$$

$n=1$

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow (j\omega) X(\omega)$$

Zaman İçinde Entegrasyon:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$$

Zaman Alanında Farklılaşma

Fourier Dönüşümü Analizi

Fourier dönüşümü $V(\omega)$ 'yi bulun

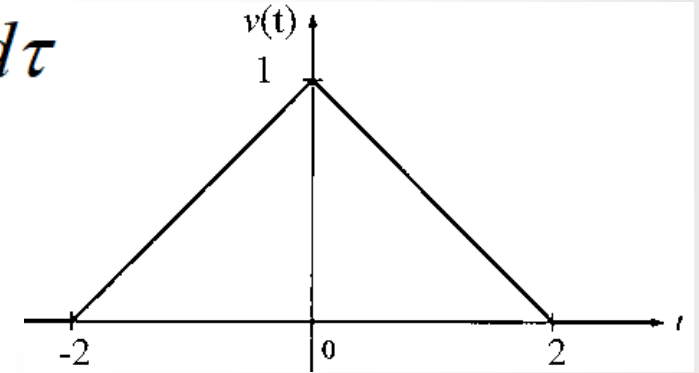
1. $x(t)$ elde edin



$$x(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$



$$v(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$



2. Bunu takip eder



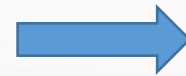
$$V(\omega) = \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$$

3. Önce $x(t)$ yazın, ardından $X(\omega)$ 'yi bulun, ardından $V(\omega)$ ile değiştirin

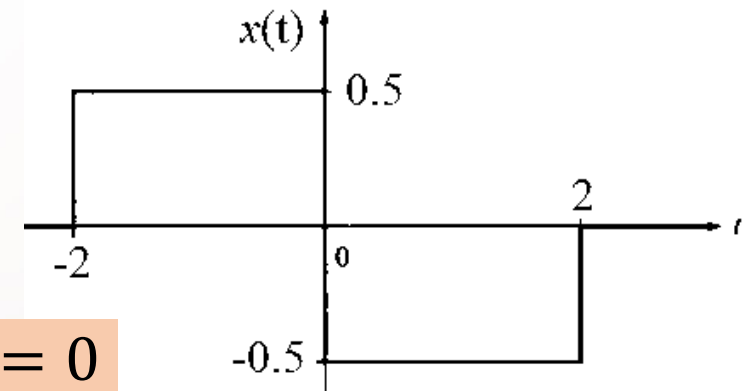
$$x(t) = 0.5p_2(t+1) - 0.5p_2(t-1)$$

$$X(\omega) = 0.5P_2(\omega)e^{j\omega} - 0.5P_2(\omega)e^{-j\omega}$$

$$X(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{\omega} e^{j\omega} - \frac{\sin(\omega)}{\omega} e^{-j\omega}$$



$$X(0) = 0$$



$$V(\omega) = \frac{X(\omega)}{j\omega}$$

t'nin Kuvveti ile çarpın:



$$t^n x(t) \leftrightarrow (j)^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega)$$

Örnek

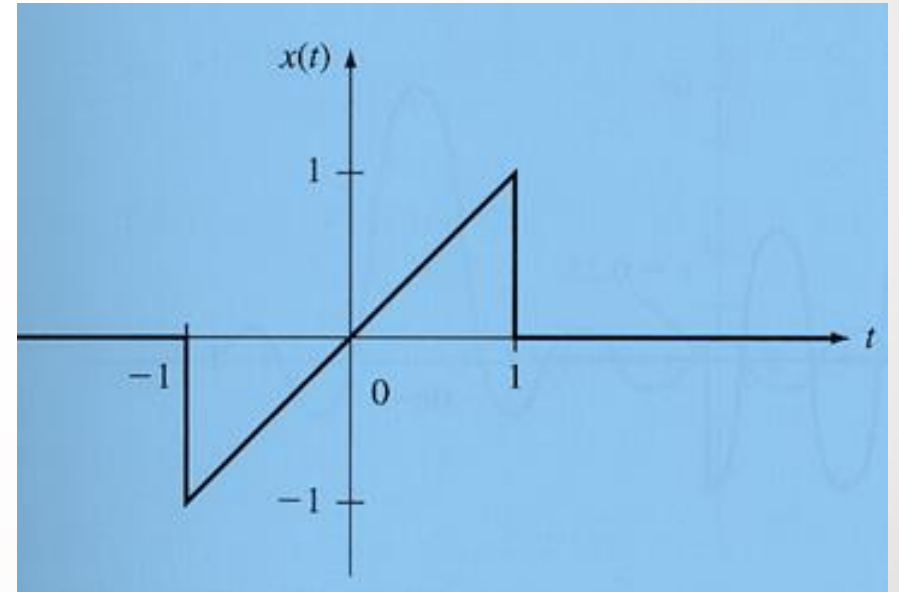
$$x(t) = t p_2(t)$$



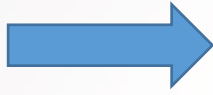
$$X(\omega) = j \frac{d}{d\omega} P_2(\omega)$$

$$X(\omega) = j \frac{d}{d\omega} \left(\frac{2 \sin \omega}{\omega} \right)$$

$$X(\omega) = j 2 \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\omega^2}$$



Frekans kayması:



$$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

Fourier Dönüşümü Delta fonksiyonu

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega)$$

Frekans
kayması:
 $x(t)=1$ olur



$$1 \cdot e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

Sinüzoidal Sinyallerin Fourier Dönüşümü

*Euler
bağıntısını
kullanma*

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j(\omega t)} + e^{-j(\omega t)}}{2}$$

Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Unutmayın ki:

$$e^{j\omega_o t} \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_o)$$

$$\cos(\omega_o t) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_o) + \delta(\omega - \omega_o)]$$

Unutmayın ki:

$$x(t) \cdot e^{j\omega_o t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_o)$$

$$x(t) \cos(\omega_o t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\omega + \omega_o) + X(\omega - \omega_o)]$$

Örnek 4.12

- Şekil 4.16(a)'da $x(t)$ sinyali için Fourier dönüşümü $X(\omega)$ 'u hesaplayın.

1. $x(t)$ 'nin türevi olan $g(t)$ sinyalini bulun

$$g(t) = \frac{d x(t)}{dt}$$

2. $g(t)$ şu şekilde yazılabilir:

$$g(t) = p_2(t) - \delta(t + 1) - \delta(t - 1)$$

3. $g(t)$ 'nin Fourier dönüşümü

$$G(\omega) = \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} - e^{j\omega} - e^{-j\omega}$$

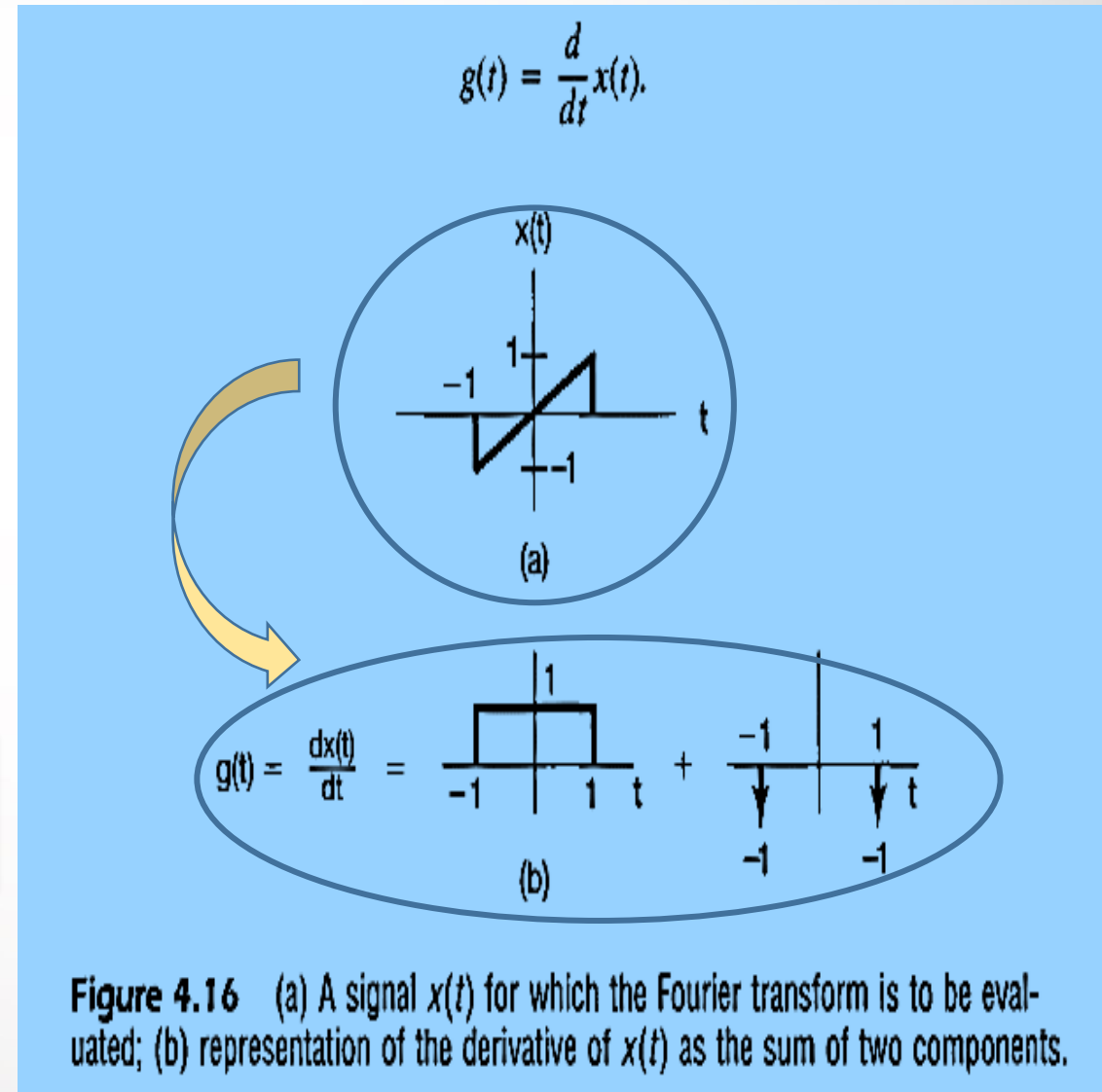
4. $X(\omega)$ ile değiştirme

$$X(\omega) = \frac{G(\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega).$$

$$X(\omega) = \frac{2 \sin \omega}{j\omega^2} - \frac{2 \cos \omega}{j\omega}.$$

- Note that $G(0) = 0$.

Fourier Dönüşümünün Özellikleri



Time Scaling:



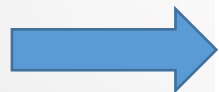
$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Zaman İçinde Evrişim



$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(\omega)Y(\omega)$$

Zaman İçinde Çarpma



$$x(t)y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

Fourier Dönüşümünün Özellikleri

TABLE 4.1 PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Property	Transform Pair/Property
Linearity	$ax(t) + bv(t) \leftrightarrow aX(\omega) + bV(\omega)$
Right or left shift in time	$x(t - c) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega c}$
Time scaling	$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad a > 0$
Time reversal	$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$
Multiplication by a power of t	$t^n x(t) \leftrightarrow j^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega) \quad n = 1, 2, \dots$
Multiplication by a complex exponential	$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \quad \omega_0 \text{ real}$
Multiplication by $\sin \omega_0 t$	$x(t) \sin \omega_0 t \leftrightarrow \frac{j}{2} [X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)]$
Multiplication by $\cos \omega_0 t$	$x(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)]$
Differentiation in the time domain	$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega) \quad n = 1, 2, \dots$
Integration	$\int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Convolution in the time domain	$x(t) * v(t) \leftrightarrow X(\omega)V(\omega)$
Multiplication in the time domain	$x(t)v(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * V(\omega)$
Parseval's theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(\omega)}V(\omega) d\omega$
Special case of Parseval's theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$
Duality	$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$