



Sistemler ve Sinyaller



Ders 6

Konvolusyon

Doçent Dr. Yunus Eği

Fourier Serileri Analizi

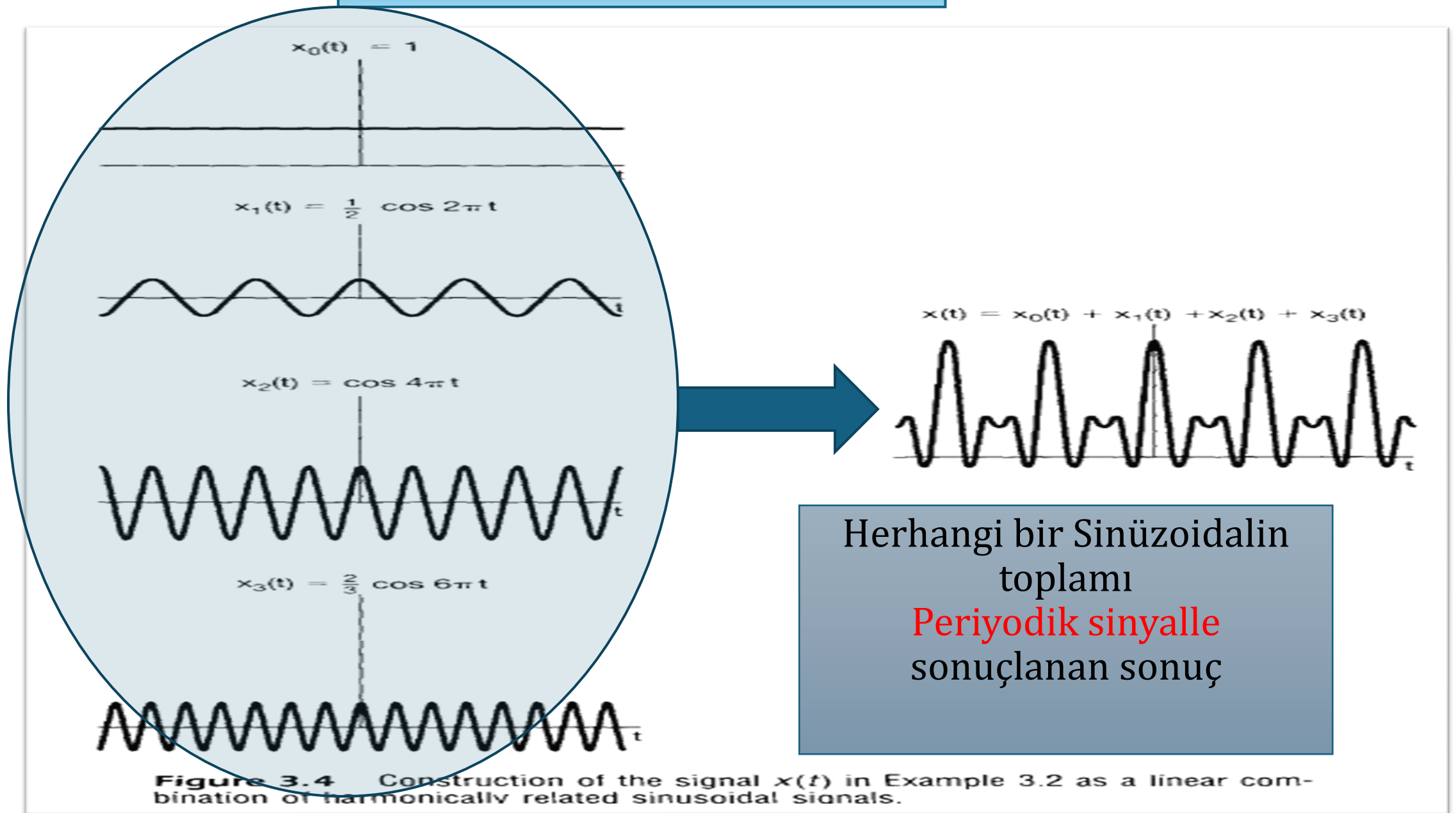
Amaç

Giriş sinyali sinüzoidal olduğunda doğrusal zamanla değişmez (LTI) sistem analizi birçok uygulamada büyük ilgi görmektedir.

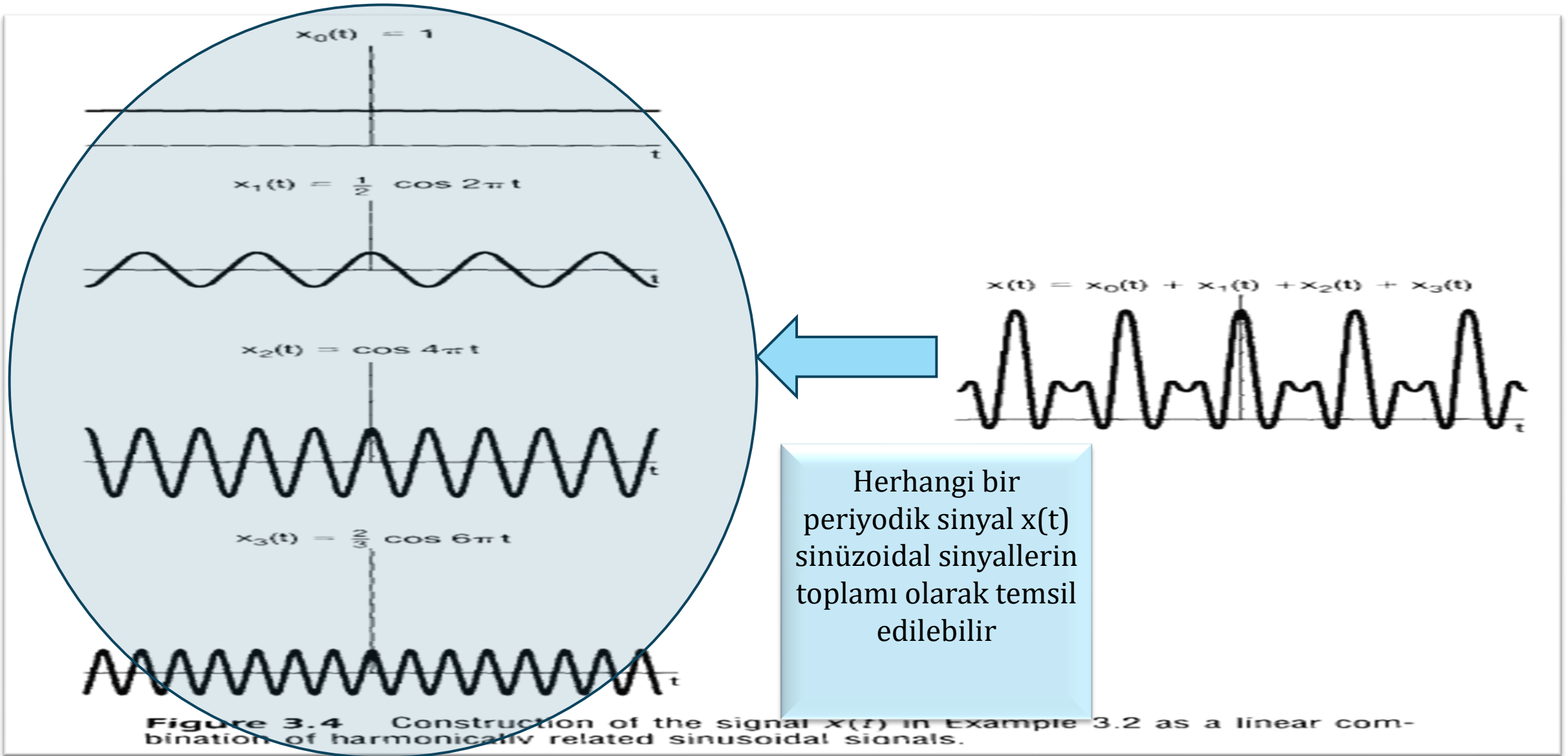
Fourier serisi analizi, sistem analizini basitleştiren sinüzoidalın sonsuz toplamı cinsinden periyodik sinyalleri ifade eder (doğrusallık)

Ek olarak, Fourier serisi analizi, bir zaman alanı sinyalinin frekans alanı bileşenlerini temsil eder

Sinüzoidal toplamı

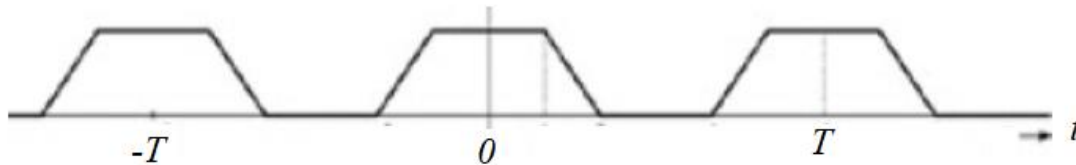
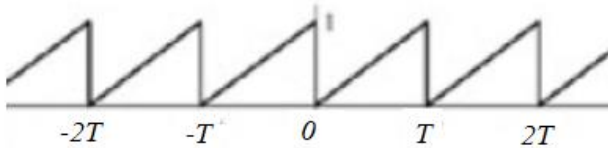
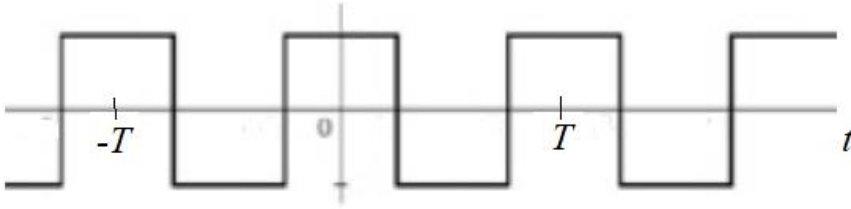


Sinüzoidal toplamı



Periyodik Sinyal

Verilen $x(t)$ herhangi bir periyodik sinyal aşağıdaki şekilde gösterilebilir



O zaman $x(t)$ Sinüzoidalın sonsuz toplamı cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

ki

a_k :Fourier serisi katsayıları

Entegrasyon
yoluyla elde
edildi

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Unutmayın ki, $e^{jk\omega_0 t}$ bir sinüzoidaldir

$$e^{jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t)$$

Fourier Serileri Yorumlama

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

$$x(t) = \dots a_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{j2\omega_0 t} \dots$$

- Ne zaman $k = 0 \rightarrow a_0 = \text{sabit (DC bileşeni)}$.
- $k = +1$ iken ve $k = -1$,
 - *temel bileşenler şuna eşittir: ω_0*
 - *İlk 1. harmonik bileşenler.*
- $k = +2$ iken ve $k = -2$,
 - $2\omega_0$ frekansı vardır
 - *İkinci 2. harmonik bileşenler.*
- Genel olarak, $k = +N$ ve $k = -N$ için bileşenler
 - *N'inci harmonik bileşenler.*

Örnek 3.2: Aşağıdaki sinyal için a k Fourier Serisi katsayılarını bulun

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3} \cos 6\pi t.$$

Unutmayın ki
Euler ilişkisi

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j(\omega t)} + e^{-j(\omega t)}}{2}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j(\omega t)} - e^{-j(\omega t)}}{2j}$$

$$x(t) = \dots a_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{j2\omega_0 t} + a_3 e^{j3\omega_0 t} \dots$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3} \cos 6\pi t.$$

ω_0 $2\omega_0$ $3\omega_0$

$$\omega_0 = 2\pi$$

Euler bağıntısını kullanma

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}).$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4},$$

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}.$$

$X(t) = \text{Sinüzoidal toplamı}$

Örnek 3.3: Aşağıdaki sinyal için a k Fourier Serisi katsayılarını bulmak için Euler bağıntısını kullanın

$$x(t) = 1 + \sin(\omega_0 t) + 2 \cos(\omega_0 t) + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j(\omega t)} + e^{-j(\omega t)}}{2}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j(\omega t)} - e^{-j(\omega t)}}{2j}$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] + [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}[e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} + e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)}].$$

$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right)e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{j(\pi/4)}\right)e^{j2\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)}\right)e^{-j2\omega_0 t}$$



a_0



a_1



a_{-1}

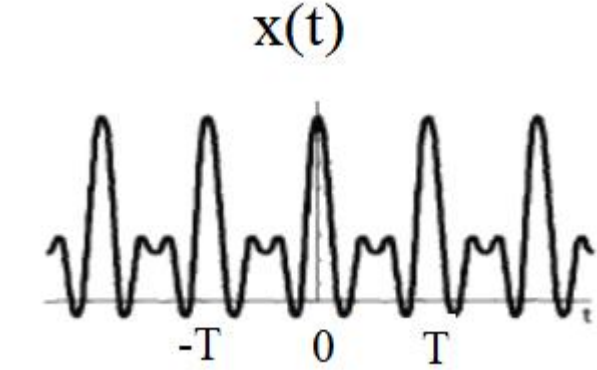


a_2



a_{-2}

Fourier Serisi Katsayıları



Fourier serileri periodiktir

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Verilen $x(t)$ periyodik,
İki parametre bulmak
için gereklidir.

1. Frekans ω_0

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

2. Genlik a_k

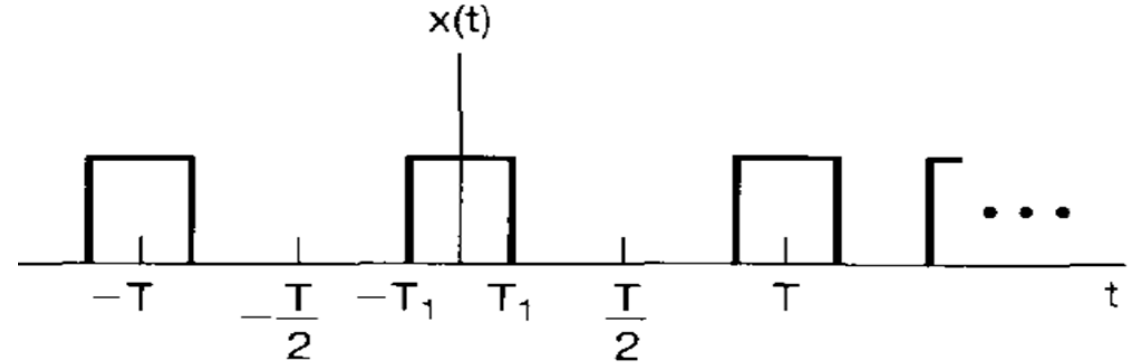
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Fourier Periyodik Sinyal Serileri

Example:

a_0 ve a_k için
Fourier Serisi
katsayılarını bulun

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$



Çözüm:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{jk\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$