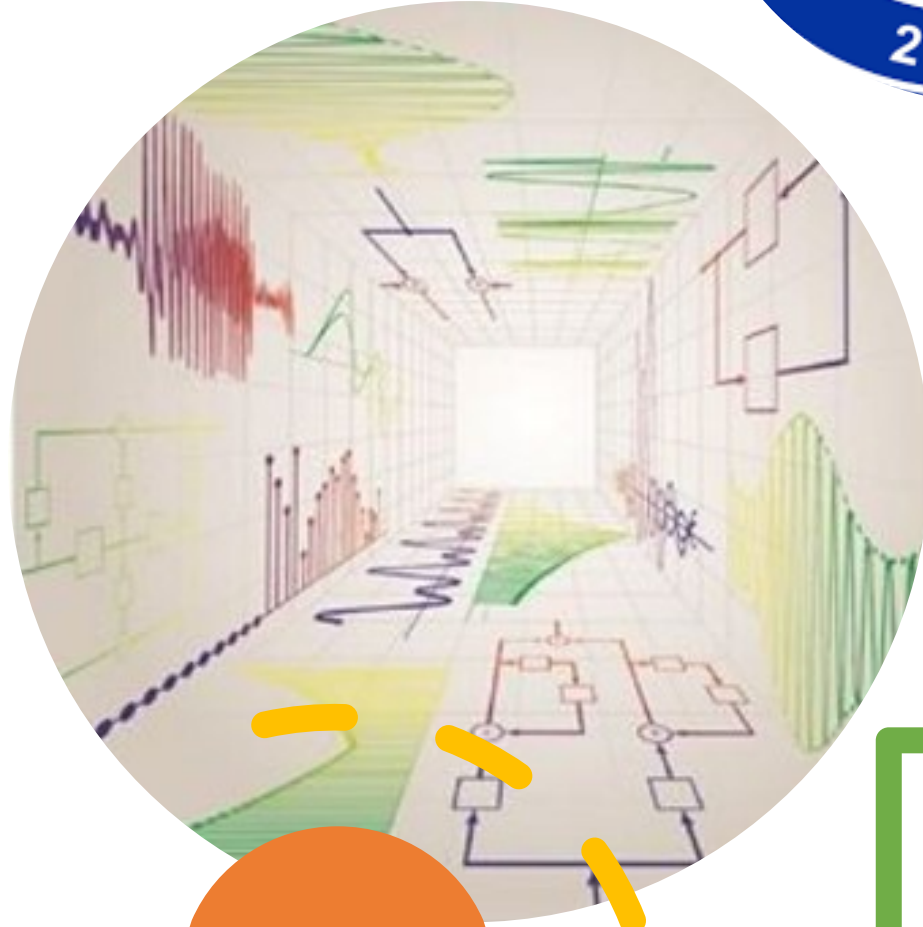


SİNYALLER VE SİSTEMLER

Doc. Dr. Yunus Egi
Elektrik Elektronik Muh.



Anahat

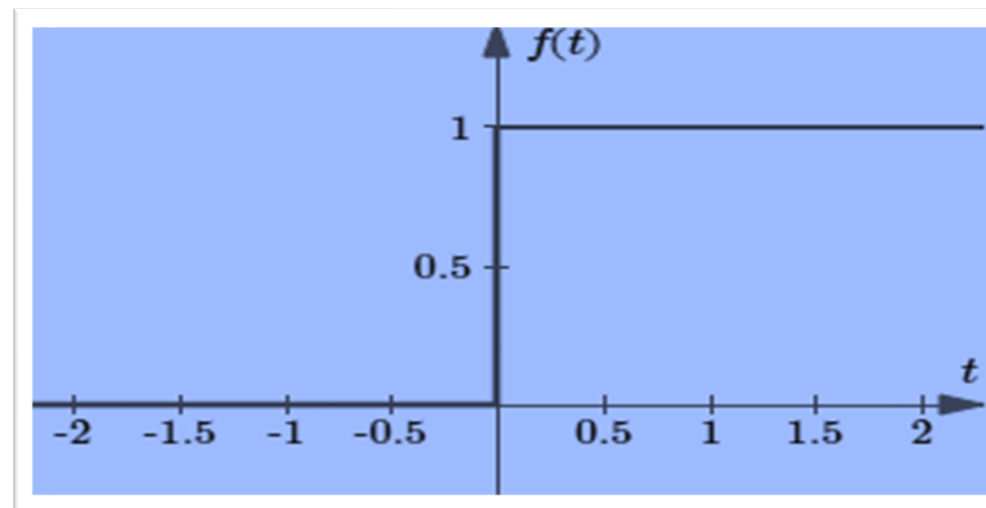
- Temel sinyallerin tanıtımı
 - Birim Adım Fonksiyonu(Unit Step Function)
 - Birim darbe sinyali(Unit Impulse Function)
- Sürekli ve zaman karmaşık üstel sinyaller
 - Gerçek ve karmaşık üstel sinyaller
 - Periodik sinyaller

1 .4 Sürekli Zamanlı Birim Adım ve Birim İmpuls Fonksiyonları

Birim Adım Foksiyonu

Anahtarlama işlemi, Birim Adım Fonksiyonu adı verilen fonksiyon ile matematiksel olarak tanımlanabilir.

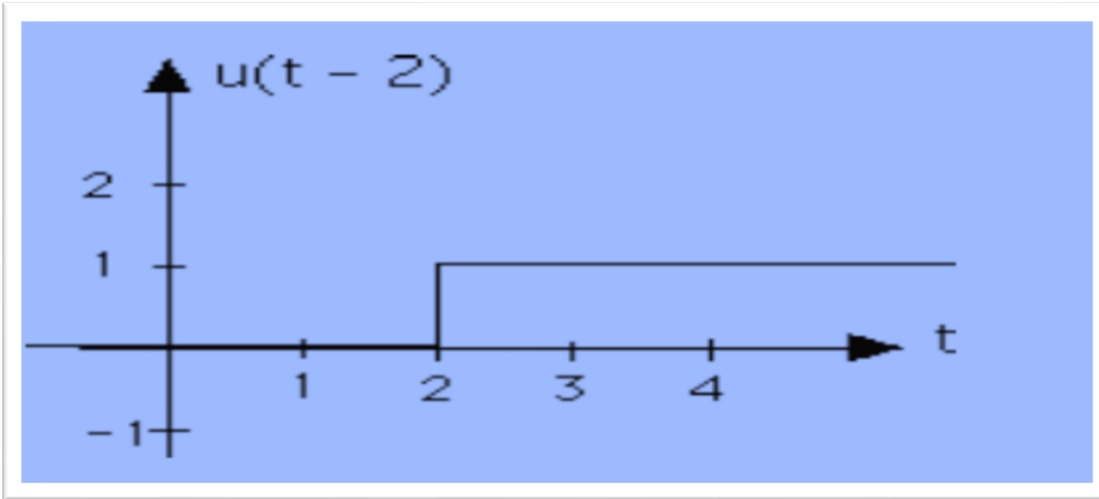
$$\text{Unit step function: } u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



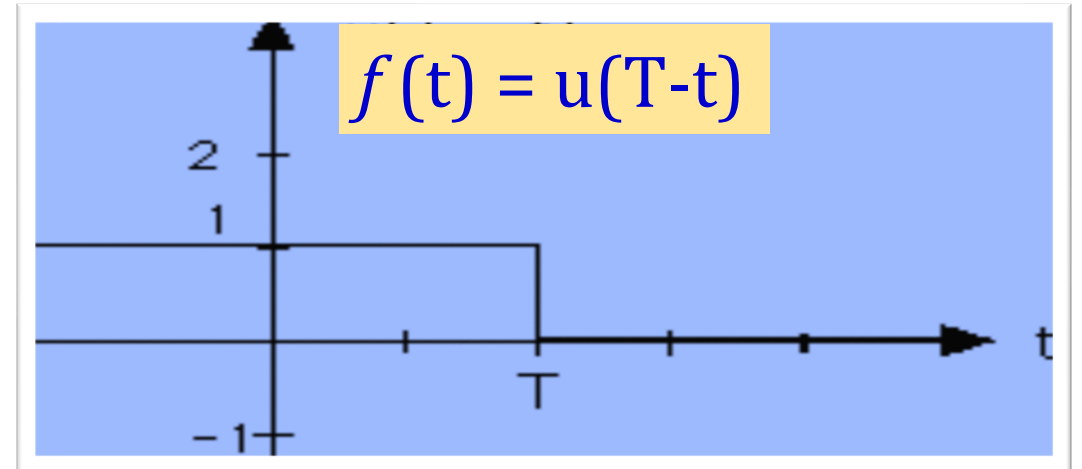
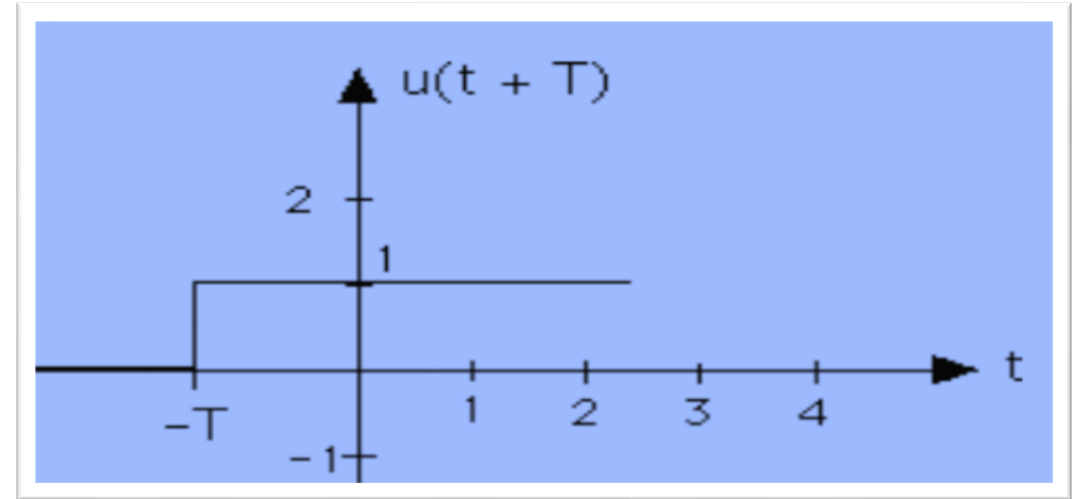
Birim Adım
Fonksiyonu

Kaydırılmış Adım Fonksiyonu

Sağ

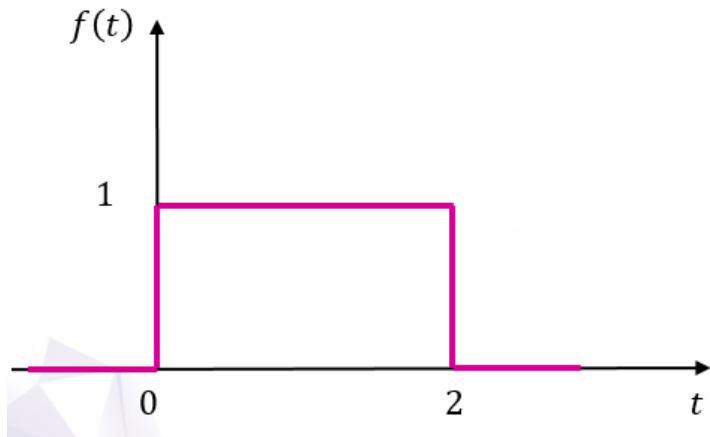


Sol



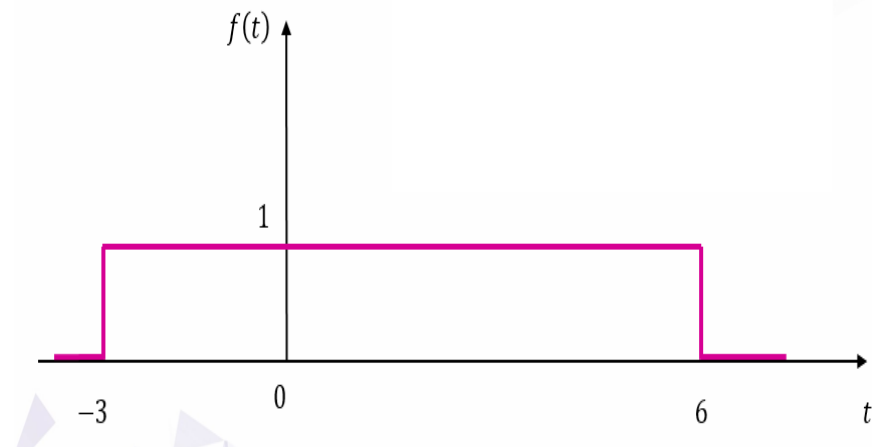
Örnekler

$$(i) f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{yoksa} \end{cases}$$



$$f(t) = u(t) - u(t-2)$$

$$(ii) f(t) = \begin{cases} 1 & -3 \leq t \leq 6 \\ 0 & \text{yoksa} \end{cases}$$



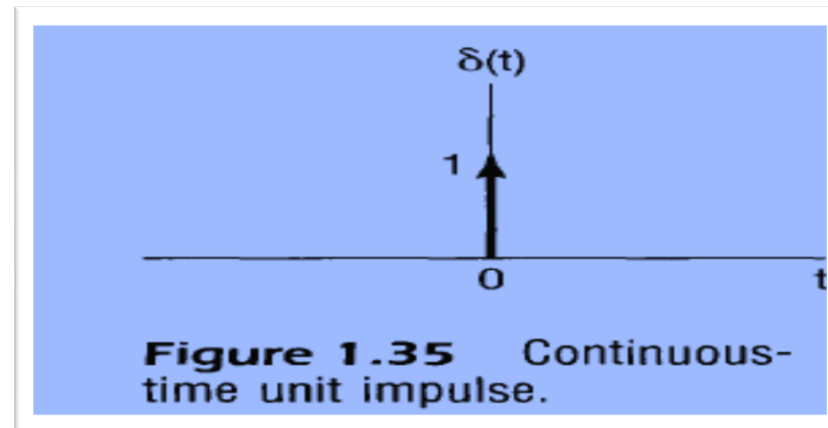
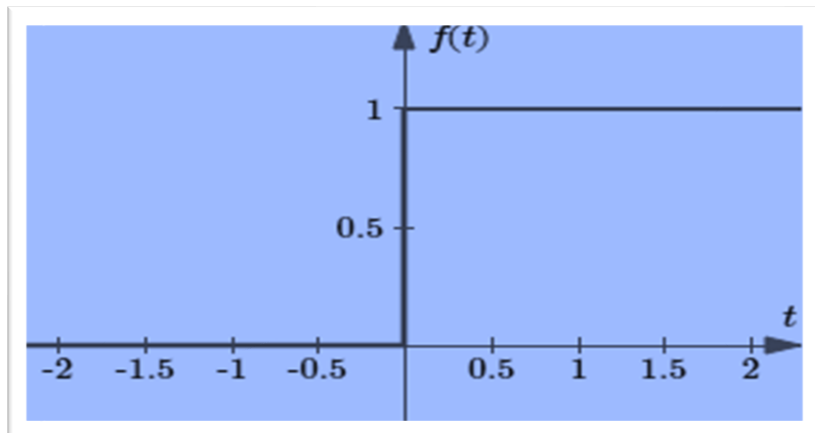
$$f(t) = u(t+3) - u(t-6)$$

Darbe Fonksiyonu

- Ayırık zaman birim Darbe(Pulse) ve Birim adım(Step) fonksiyonları arasındaki ilişki.
- Özellikle, sürekli zaman birim adımı, birim darbe'nin integralidir

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}.$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau.$$

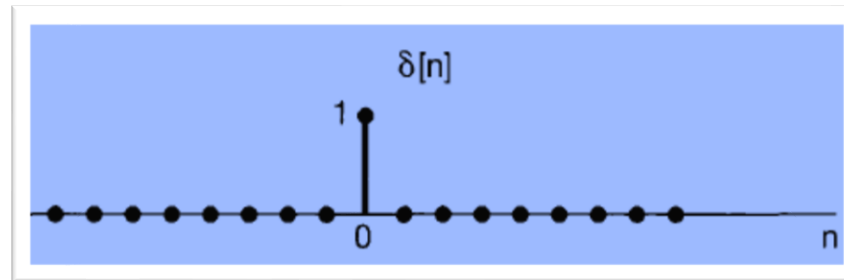


1 nabız alanını temsil eder.

1.4 BİRİM DARBE VE BİRİM ADIM FONKSİYONLARI

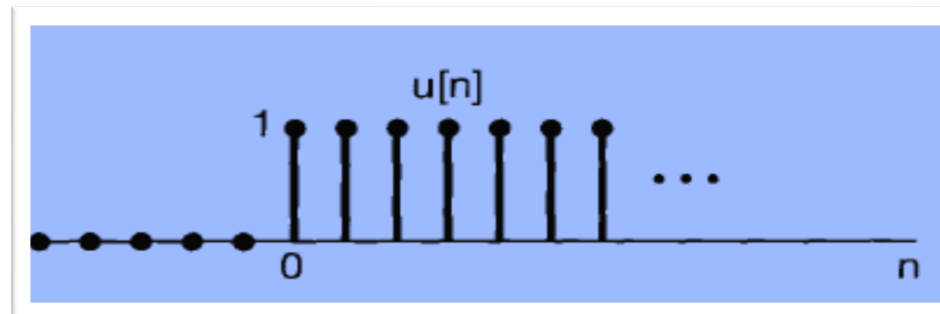
- En basit ayrık zamanlı sinyallerden biri, şu şekilde tanımlanan birim darbedir:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



- İkinci bir temel ayrık zamanlı sinyal, u[n] ile gösterilen ve şu şekilde tanımlanan ayrık zaman birimi adıdır:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



Sürekli zamanlı karmaşık üstel sinyal **(Continuous-time complex exponential signal)**

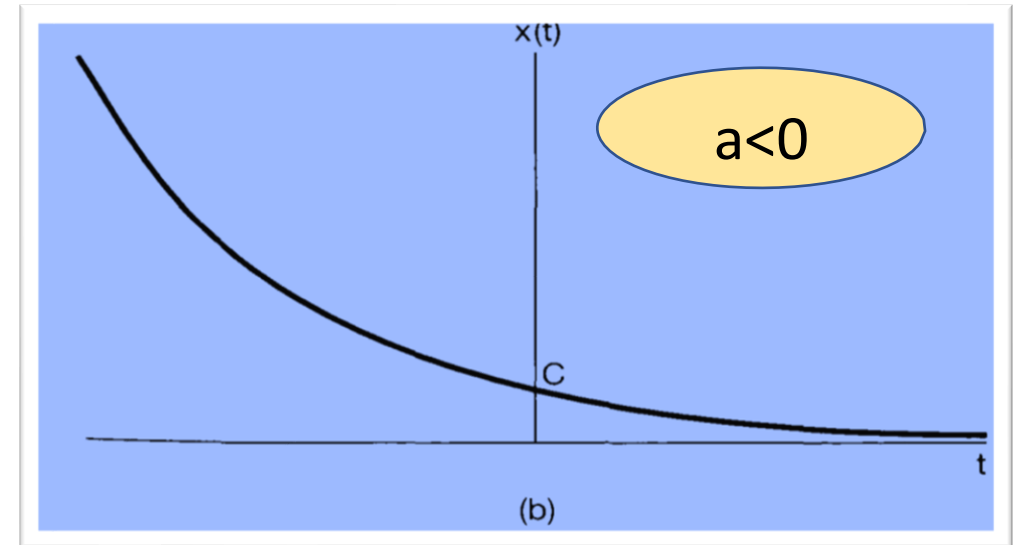
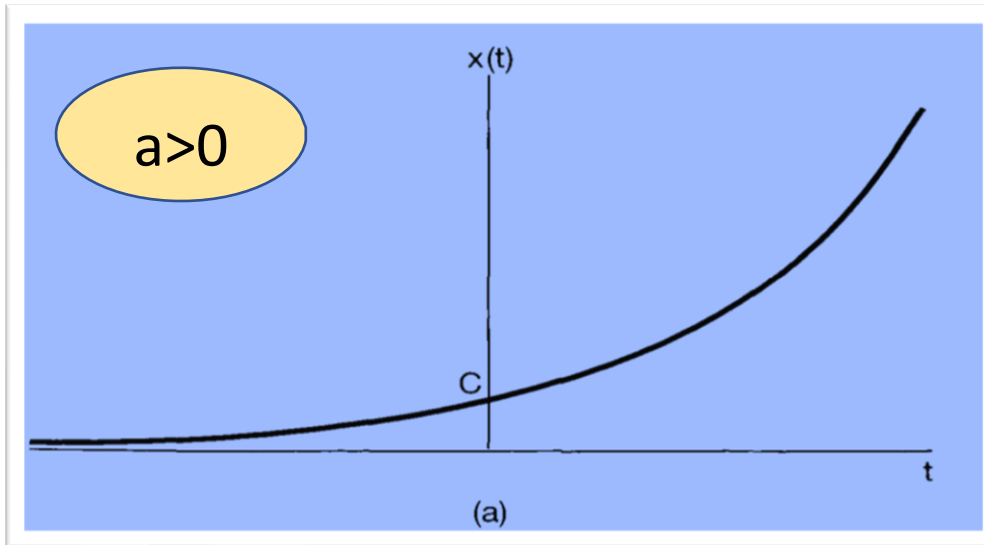
Gerçek Üstel Sinyaller

$$x(t) = C e^{(a+jw_o)t} = C e^{at} e^{jw_o t}$$

$$w_o = 0$$

Gerçek Üs

$$x(t) = C e^{at}$$

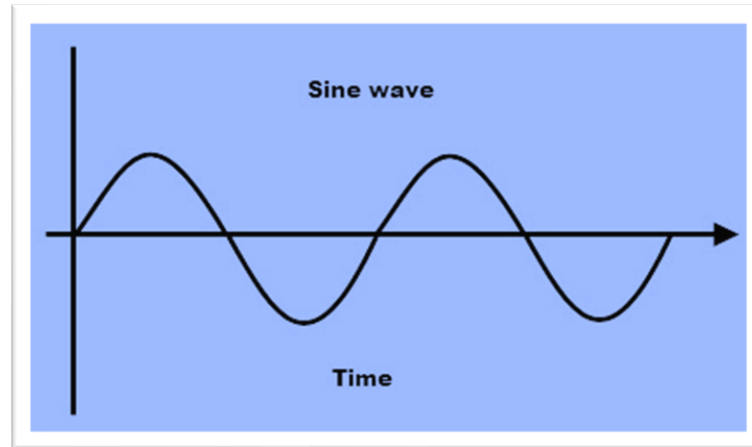


Hayali Üstel Sinyaller (Imaginary Exponential Signals)

$$x(t) = C e^{(a+j\omega_0)t} = C e^{at} e^{j\omega_0 t}$$

$$a = 0$$

$$x(t) = C e^{j\omega_0 t} = C (\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t))$$



Bu sinyalin önemli bir özelliği periyodik olmasıdır.

$$\omega_0 T = 2\pi$$

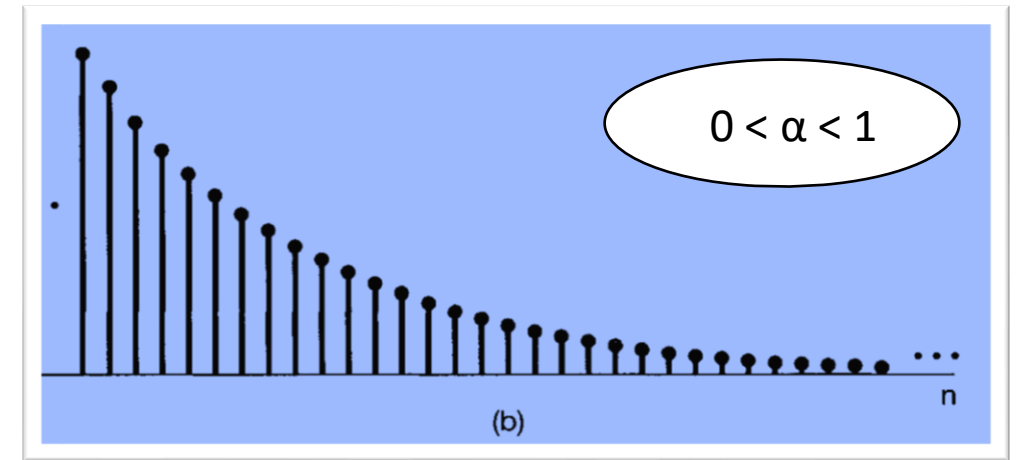
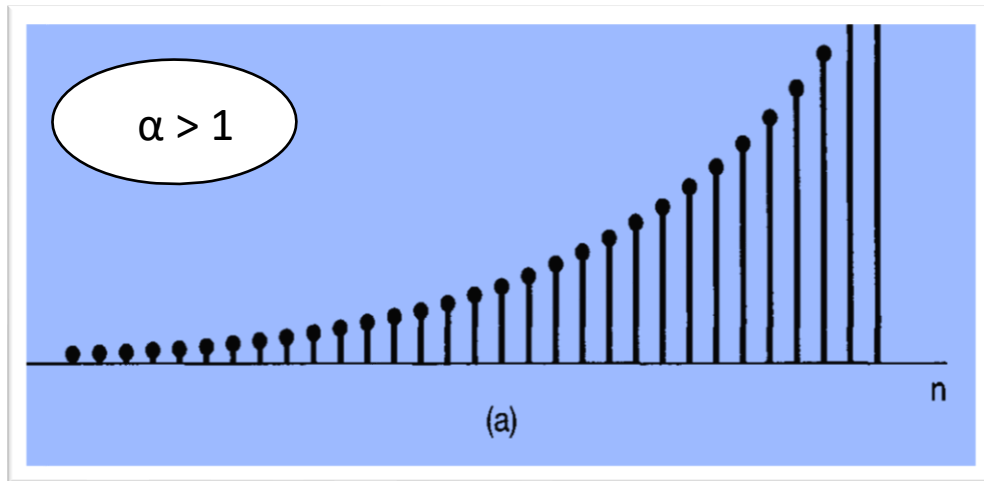
Ayrık zamanlı karmaşık üstel sinyal **(Discrete-time complex exponential signal)**

Ayrık Zamanlı Gerçek Üstel Sinyaller (Discrete-Time Real Exponential Signals)

$$x[n] = \alpha^n e^{jw_o n} = \alpha^n (\cos(w_o n) + j \sin(w_o n))$$

$$w_o = 0$$

$$x[n] = \alpha^n$$

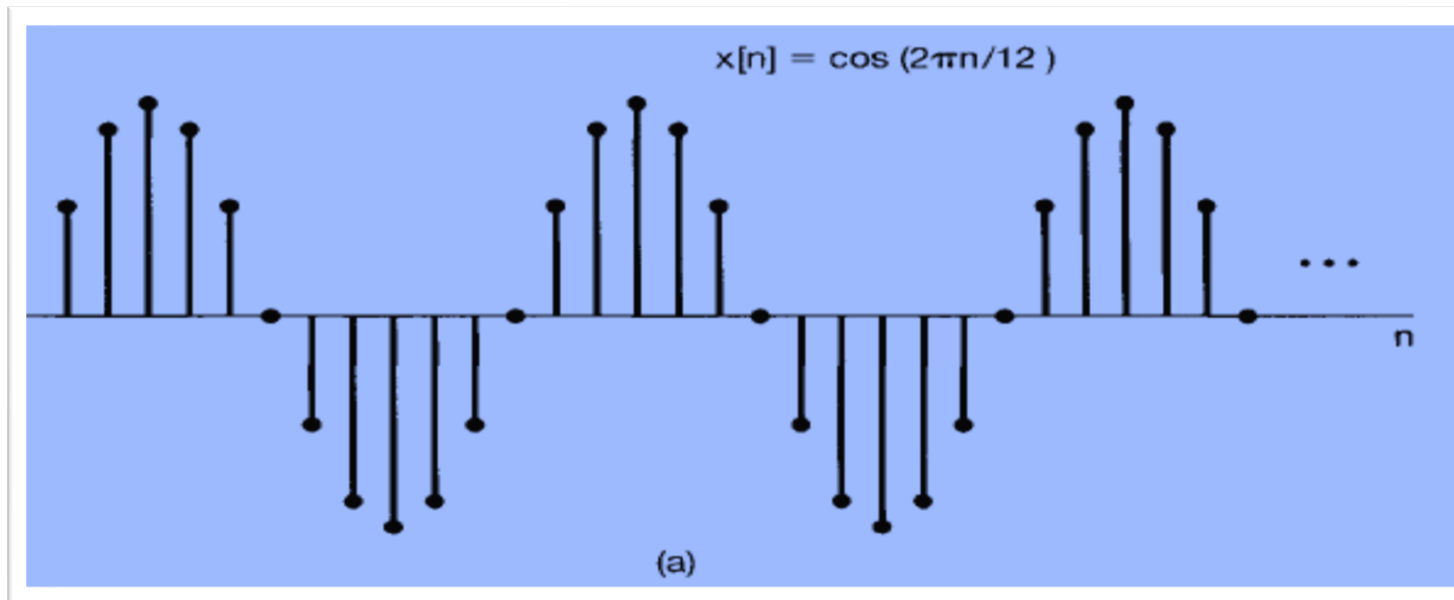


Ayrık Zamanlı Hayali Üstel Sinyaller (Discrete-Time Imaginary Exponential Signals)

$$x[n] = \alpha^n e^{j\omega_0 n} = \alpha^n (\cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n))$$

$$\alpha=1$$

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n)$$

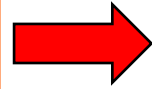


**Ayrık bir sinyalin
periyodu nasıl
bulunur???**

DT'nin periyodikliği

$e^{j\omega_0 n}$ Sinyalinin $N > 0$ için periyodu ile periyodik olması için,

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n},$$



$$e^{j\omega_0 N} = 1.$$



$$\omega_0 N = 2\pi m,$$

$\omega_0 N$, 2π 'nin katı olmalıdır.

- $e^{j\omega_0 n}$ Sinyali periyodiktir, eğer $\frac{\omega_0}{2\pi}$ bir rasyonel sayı ise. $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$
- eğer $x[n]$ temel periyodu N ile periyodikse, temel frekansı(Funumental Frequency).

$$N = m \left(\frac{2\pi}{\omega_0} \right).$$

Örnek 1.6

Ayrık zamanlı sinyalin temel periyodunu $x[n] = e^{j(2/3)n} + e^{j(3/4)n}$ olarak belirlemek istediğimizi

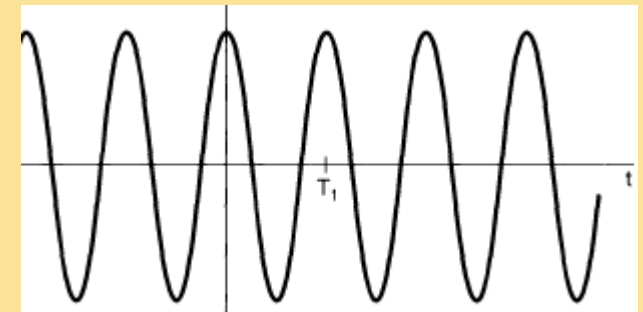
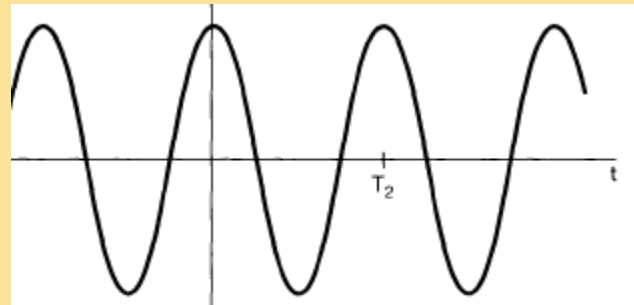
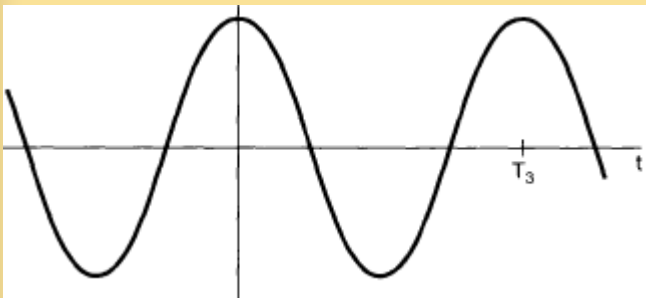
$$x[n] = e^{j(2\pi/3)n} + e^{j(3\pi/4)n}$$

Denklem (1.59)'un sağ tarafındaki ilk üstelin temel periyodu 3'tür. Bu, denklem (1.58)'den doğrulanabilirken, bu cevabı elde etmenin daha basit bir yolu vardır. Özellikle, bu üstelin değerlerinin tekrar etmeye başlaması için ilk terimin $(27/3)n$ açısının 27'nin bir katı ile artırılması gerektiğine dikkat edin. Daha sonra, n 'nin 3 artırılması durumunda açının 27'nin tek bir katı ile artırılacağını hemen görürüz. İkinci terimle ilgili olarak, $(3\pi/4)n$ açısını 2 artırmak için n 'nin 8/3 artırılması gerektiğini görüyoruz ki bu imkansızdır çünkü n bir tam sayı olmakla sınırlıdır. Benzer şekilde, açığı 4 artırmak için n 'ye 16/3'lük tam sayı olmayan bir artış gerekir. Ancak, açının 6π artırılması, n 'e 8'lik bir artış gerektirir ve dolayısıyla ikinci terimin temel periyodu 8'dir.

Şimdi, tüm $x[n]$ sinyalinin tekrar etmesi için, denklem (1.59)'daki terimlerin her biri kendi temel periyodunun tam sayı sayısından geçmelidir. Bunu başaran en küçük n artışı 24'tür. Yani, 24 puanlık bir aralıkta, denklem (1.59)'un sağ tarafındaki ilk terim sekiz temel periyodundan, ikinci terim üç temel periyodundan ve genel sinyal $x[n]$ tam olarak bir temel periyodundan geçmiş olacaktır.

Ayrık Zamanlı Karmaşık Üslü Sayıların Periyodiklik Özellikleri (Periodicity Properties of Discrete-Time Complex Exponentials)

- Sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı sinyaller arasında birçok benzerlik olsa da, bir dizi önemli fark da vardır.
- Sürekli zamanın aşağıdaki iki özelliği aşağıdaki gibidir.
 - ω_0 'ın büyüklüğü ne kadar büyükse, sinyaldeki salınım oranı o kadar yüksek olur;
 - $e^{j\omega_0 t}$ ω_0 'ın herhangi bir değeri için periodiktir.



1.3.3 Periodicity Properties of Discrete-Time Complex Exponentials

- Frekans ile ayırık zaman kompleksi üstelini düşünün

$$\omega_0 + 2\pi:$$

$$e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n}$$

- Frekanstaki üstel $(\omega_0 + 2\pi)$ ω_0 frekansındaki üstel ile aynıdır.
- Ayırık zamanda, frekans ω_0 olan sinyal, 2π , $\omega_0 \pm 4\pi$ vb. $\omega_0 \pm$ frekanslara sahip sinyallerle aynıdır
- Bu nedenle, ayırık zamanlı karmaşık üsleri göz önünde bulundururken, ω_0 seçmek için yalnızca 2π uzunluğunda bir frekans aralığını dikkate almamız gerekir.
- $0 \leq \omega_0 \leq 2\pi$ aralığını veya $-\pi \leq \omega_0 < \pi$ aralığını kullanacağız.

1.3.3 Periodicity Properties of Discrete-Time Complex Exponentials

- Bu, DT sinyalinde ω_0 'ı 0'dan artırdığımızda, $\omega_0 = \pi$ 'a ulaşana kadar giderek daha hızlı salınan sinyaller elde ettiğimiz anlamına gelir.
- ω_0 'ı artırmaya devam ettikçe, $\omega_0 = 2\pi$ 'ye ulaşana kadar salınım oranını azaltırız, bu da $\omega_0 = 0$ ile aynı sabit diziyi üretir.
- Bir sonraki slayttaki Şekil bunu çok iyi açıklıyor

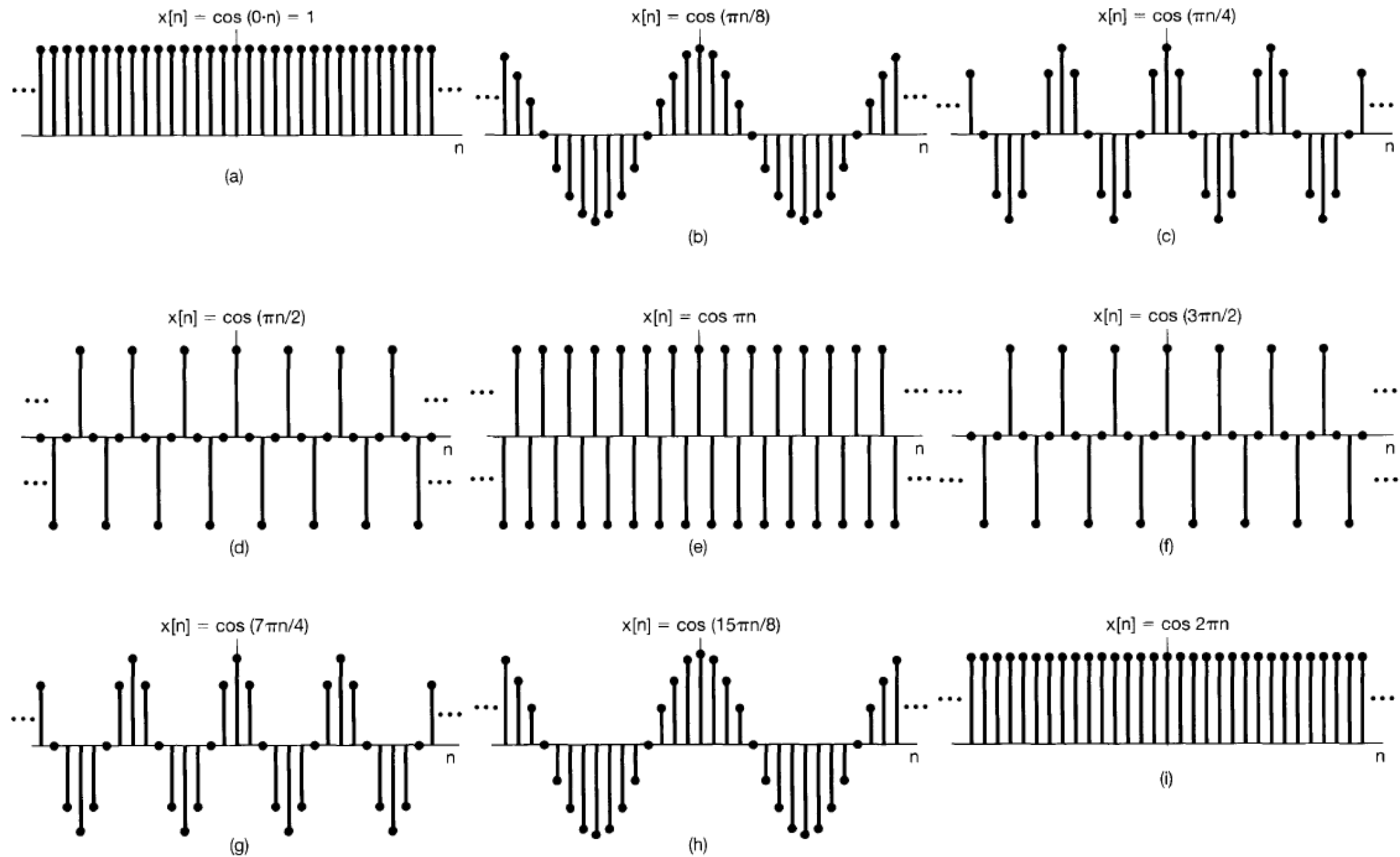


Figure 1.27 Discrete-time sinusoidal sequences for several different frequencies.