SAYISAL GÖRÜNTÜ İŞLEME / BÖLÜM 4

Frekans Alanında Filtreleme

Fourier dönüşümü • DFT • FFT • Görüntü filtreleri



Lisans dersi | Teori + MATLAB uygulaması

Bu derste neler öğreneceğiz?

- Fourier dönüşümü ve frekans spektrumunu yorumlamak
- Örnekleme, Nyquist koşulu ve aliasing ilişkisini açıklamak
- 1B ve 2B DFT/IDFT hesaplamak; FFT'nin avantajını anlamak
- Frekans alanında alçak, yüksek ve seçici geçiren filtre tasarlamak
- MATLAB ile görüntü filtreleme uygulamak ve sonuçları karşılaştırmak

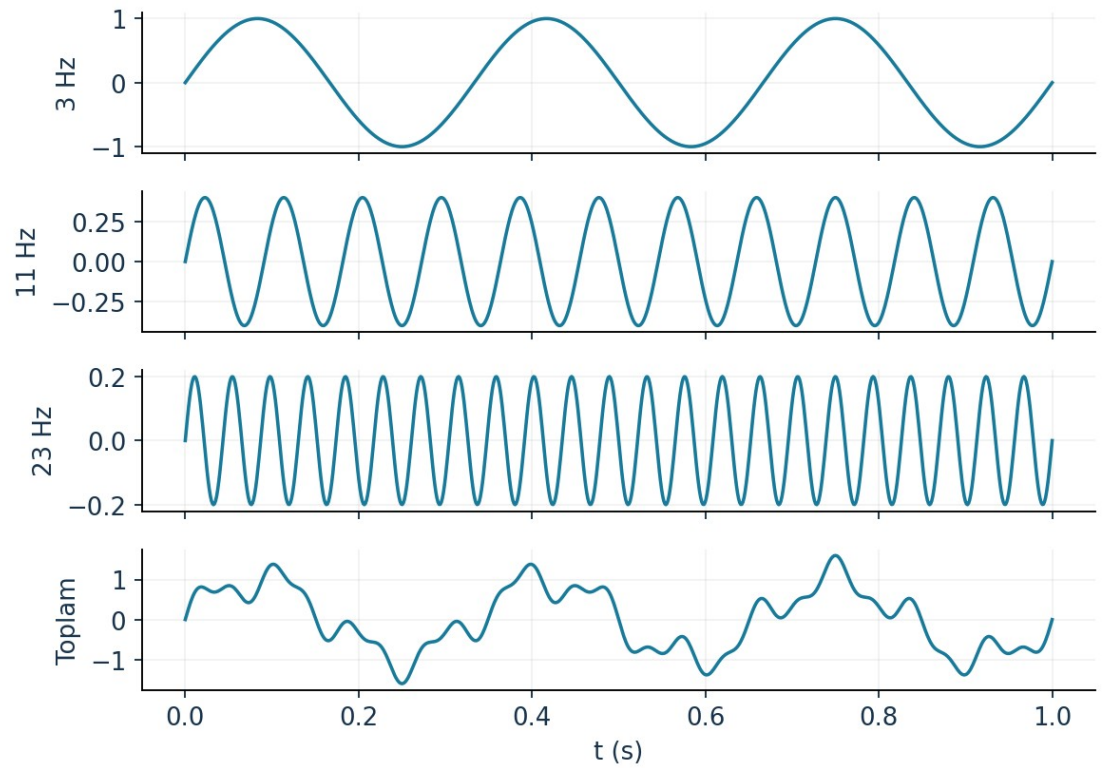
BÖLÜM 4 / 01

Fourier dönüşümünün temelleri

Sinyallerin sinüzoidal bileşenlerle ifade edilmesi ve örnekleme.

Fourier fikri: karmaşık sinyal, basit bileşenler

- Periyodik bir sinyal, ağırlıklı sinüs ve kosinüs bileşenleriyle ifade edilebilir.
- Frekans alanı: sinyalde hangi frekansların ne kadar bulunduğunu gösterir.
- Görüntülerde frekans, uzamsal yoğunluk değişimini ifade eder.



Ana fikir: Frekans bileşenlerini değiştirerek görüntüyü değiştirebiliriz.

Kaynak: §4.1, s. 205–206

Karmaşık sayılar ve Euler bağıntısı

$$C = R + \mathrm{j}I = |C|e^{\mathrm{j}\theta}$$

$$|C| = \sqrt{R^2 + I^2}, \quad e^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$$

- R: gerçek kısım; I: sanal kısım.
- Genlik, karmaşık sayının büyüklüğünü verir; faz, açısını belirler.
- Faz hesabında dört bölgeli atan2 kullanılır.

Fourier serisi ve sürekli Fourier dönüşümü

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{j}2\pi nt/T}$$

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{j}2\pi\mu t}\,\mathrm{d}t$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{\mathrm{j}2\pi\mu t}\,\mathrm{d}\mu$$

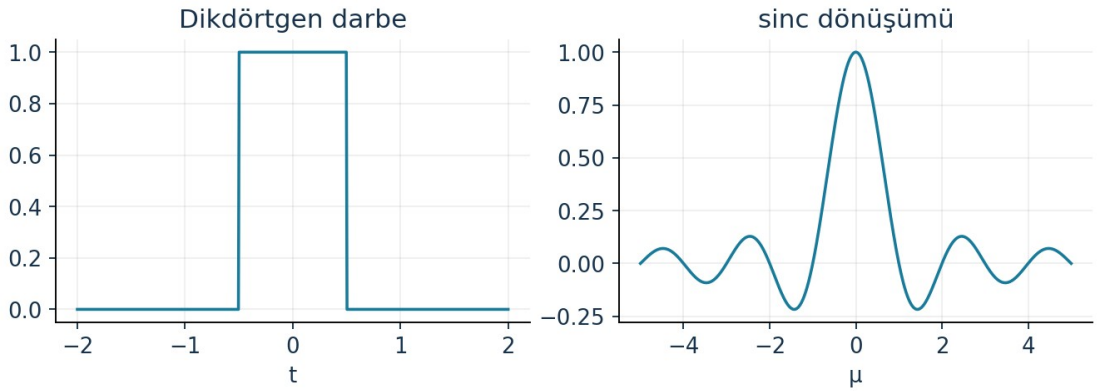
- Fourier serisi periyodik fonksiyonlar için ayrık harmonikler kullanır.
- Sürekli dönüşüm frekansın sürekli olduğu bir gösterimdir.
- Ters dönüşüm ile uzamsal/zamansal fonksiyon geri elde edilir.

Dikdörtgen darbenin spektrumu

$$F(\mu) = AW\ \mathrm{sinc}(\mu W)$$

$$\mathrm{sinc}(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$$

- W: darbe genişliği, A: darbe genliği.
- Darbe genişledikçe spektrum daralır.
- Spektrumun sıfırları μ = k/W (k ≠ 0) konumundadır.



Kaynak: Örnek 4.1, s. 211–212

Dürtü ve konvolüsyon teoremi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$$

$$(f * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,h(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau$$

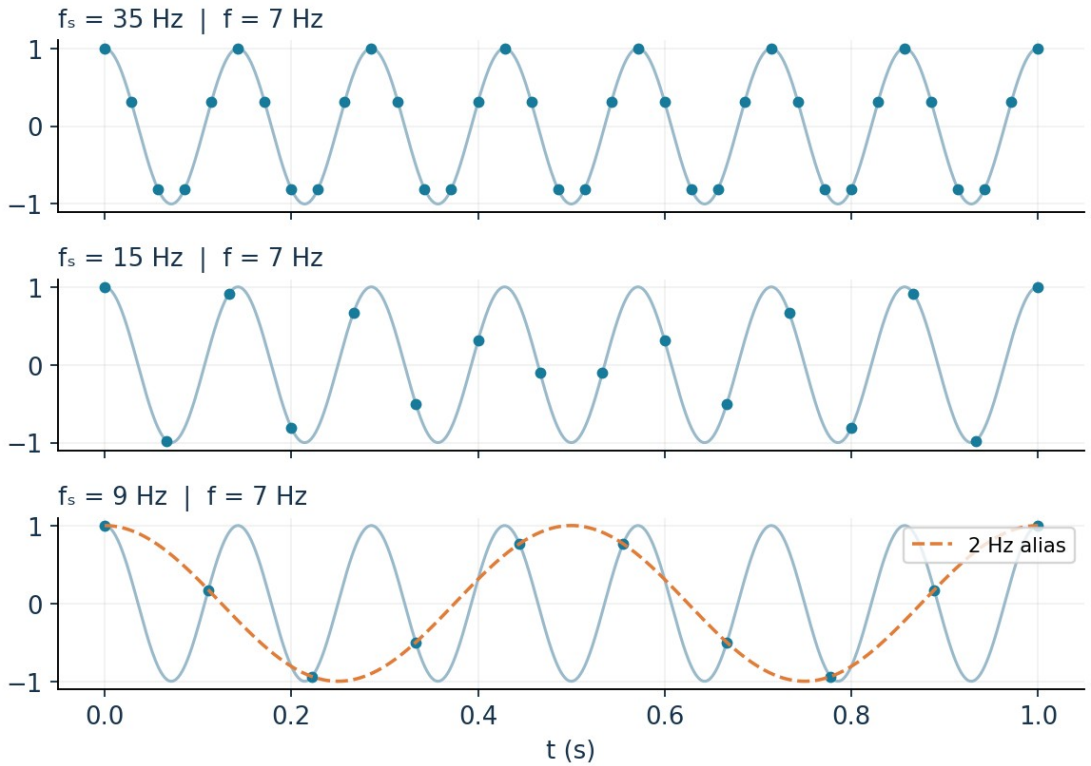
$$\mathcal{F}\{f * h\} = F(\mu)H(\mu)$$

- Dürtü, örnekleme konumundaki değeri seçer.
- Konvolüsyon, bir fonksiyonun diğerinin üzerinde kaydırılmasıyla hesaplanır.
- Uzamsal konvolüsyon frekans alanında noktasal çarpıma karşılık gelir.

Örnekleme ve Nyquist koşulu

$$f_s = \frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{\max}$$

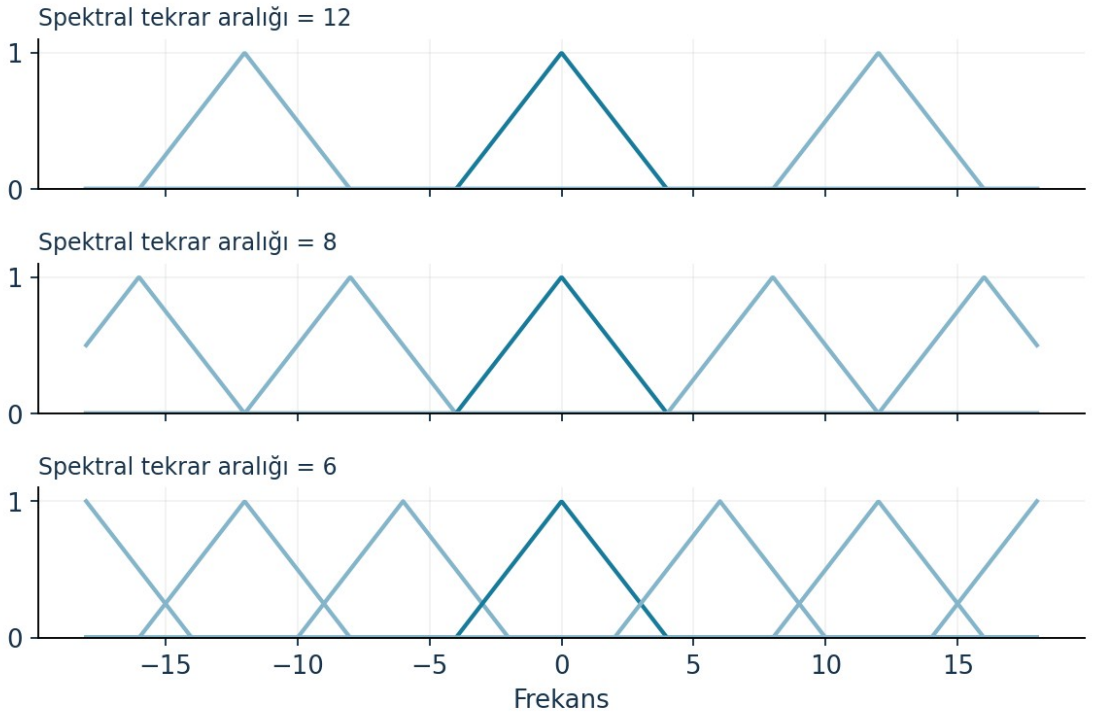
- Örnekleme aralığı ΔT, örnekleme frekansı $f_s = 1/\Delta T$.
- Bant sınırlı sinyal için örnekleme hızı en yüksek frekansın iki katını aşmalıdır.
- Yetersiz örnekleme, frekans kopyalarının üst üste binmesine yol açar.



Örneklenmiş sinyalin spektrumu

$$\widehat{F}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\mu - \frac{k}{\Delta T}\right)$$

- Örnekleme, spektrumu f_s aralıklarla tekrarlar.
- Yeterli aralık varsa ideal alçak geçiren filtre ile merkezdeki kopya ayrılabilir.
- Kopyalar çakıştığında özgün spektrum tam olarak ayrılamaz.



Aliasing ve görüntülerde moiré

- Farklı sürekli sinyaller aynı örnekleri üretebilir.
- Görüntülerde ince desenler, sahte düşük frekanslı desenler oluşturabilir.
- Çözüm: örnekleme/alt örnekleme öncesi yüksek frekansları bastırmak.



Anti-aliasing filtresi örneklemeden önce uygulanmalıdır.

Sinyalin yeniden oluşturulması

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)\ \mathrm{sinc}\left(\frac{t - n\Delta T}{\Delta T}\right)$$

- İdeal rekonstrüksiyon, örnek değerleriyle ağırlıklandırılan kaydırılmış sinc fonksiyonlarının toplamıdır.
- Sinc interpolasyonu teorik olarak sonsuz sayıda terim gerektirir.
- Pratik görüntü işlemede en yakın komşu, bilineer ve bikübik interpolasyon kullanılır.

BÖLÜM 4 / 02

Ayrık Fourier dönüşümü

1 boyutlu DFT’den 2 boyutlu görüntü spektrumuna.

1B DFT ve ters DFT

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-\mathrm{j}2\pi ux/M}$$

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{\mathrm{j}2\pi ux/M}$$

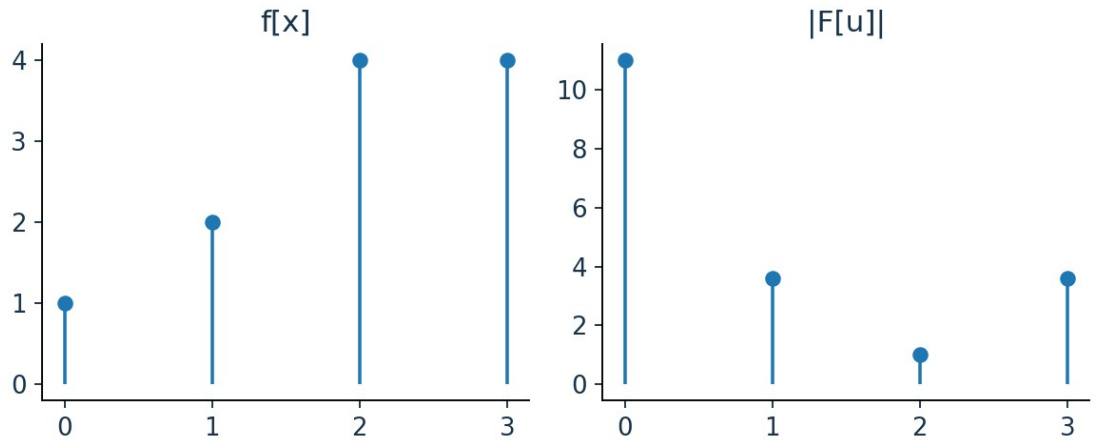
- M örnekten M karmaşık frekans katsayısı hesaplanır.
- x ve u değerleri 0, 1, ..., M−1 aralığındadır.
- DFT ve IDFT periyodiktir; 1/M katsayısı kaynakta IDFT'dedir.

Kaynak: Eş. (4-44), (4-45), s. 227

Çözümlü örnek: 4 noktalı DFT

$$F(1) = 1 + 2e^{-j\pi/2} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2}$$

- f = [1, 2, 4, 4], M = 4.
- F(0) = 1+2+4+4 = 11.
- F(1) = −3+2j; F(2) = −1; F(3) = −3−2j.
- IDFT uygulanınca başlangıç dizisi geri kazanılır.



Kaynak: Örnek 4.4, s. 229

Örnekleme aralığı ve frekans çözünürlüğü

$$T = M\Delta T, \qquad \Delta u = \frac{1}{M\Delta T} = \frac{1}{T}$$

$$R = M\Delta u = \frac{1}{\Delta T}$$

- T: gözlem süresi; Δu: frekans aralığı.
- Örnek: M=100, ΔT=0.01 s → T=1 s, Δu=1 Hz, f_s=100 Hz.
- Daha uzun kayıt, frekans binleri arasında daha küçük mesafe sağlar.

Kaynak: Eş. (4-49)–(4-51), s. 228–229

2B DFT: görüntünün Fourier dönüşümü

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\, e^{\mathrm{j}2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

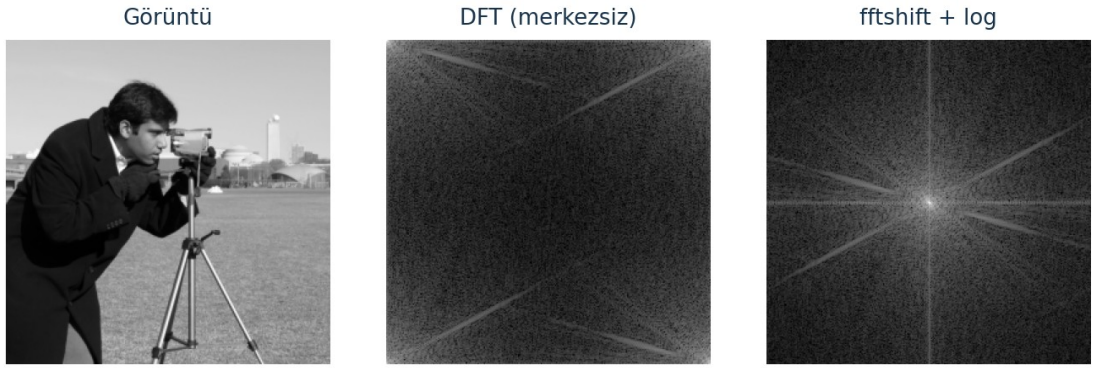
- f(x,y): M×N boyutlu gri seviye görüntü.
- u ve v, satır ve sütun yönlerindeki uzamsal frekans indeksleridir.
- Ters DFT, karmaşık spektrumdan görüntüyü yeniden üretir.

Kaynak: Eş. (4-67), (4-68), s. 240

Fourier spektrumunu nasıl görüntüleriz?

$$S(u,v) = \log(1 + |F(u,v)|)$$

- DFT'nin ham çıktısında DC bileşeni (0,0) konumundadır.
- fftshift, düşük frekansları merkeze taşır.
- log(1+|F|) dönüşümü küçük bileşenleri görünür kılar.



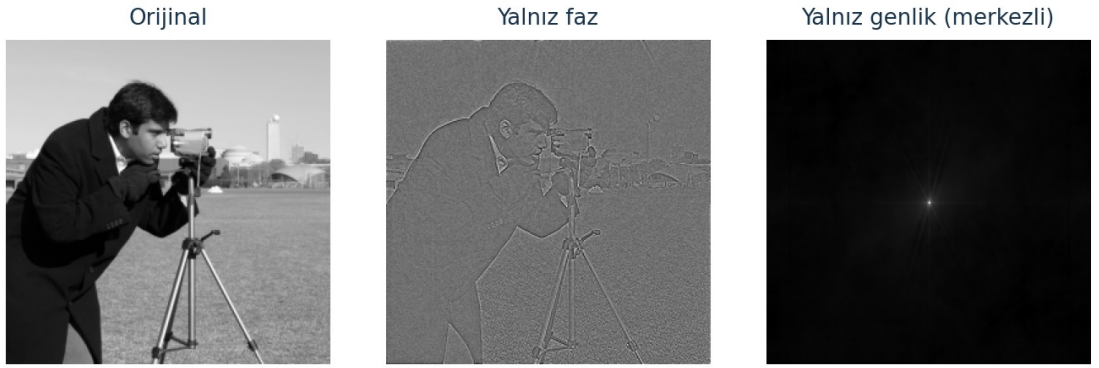
Genlik, faz ve güç spektrumu

$$F = |F|e^{j\phi}, \quad |F| = \sqrt{R^2 + I^2}$$

$$\phi = \text{atan2}(I, R), \quad P = |F|^2$$

$$F(0,0) = MN\overline{f}$$

- Genlik frekans bileşeninin büyüklüğünü gösterir.
- Faz, görüntünün yapısal ve konumsal bilgisi için kritiktir.
- DC bileşeni görüntü ortalamasının MN katıdır.



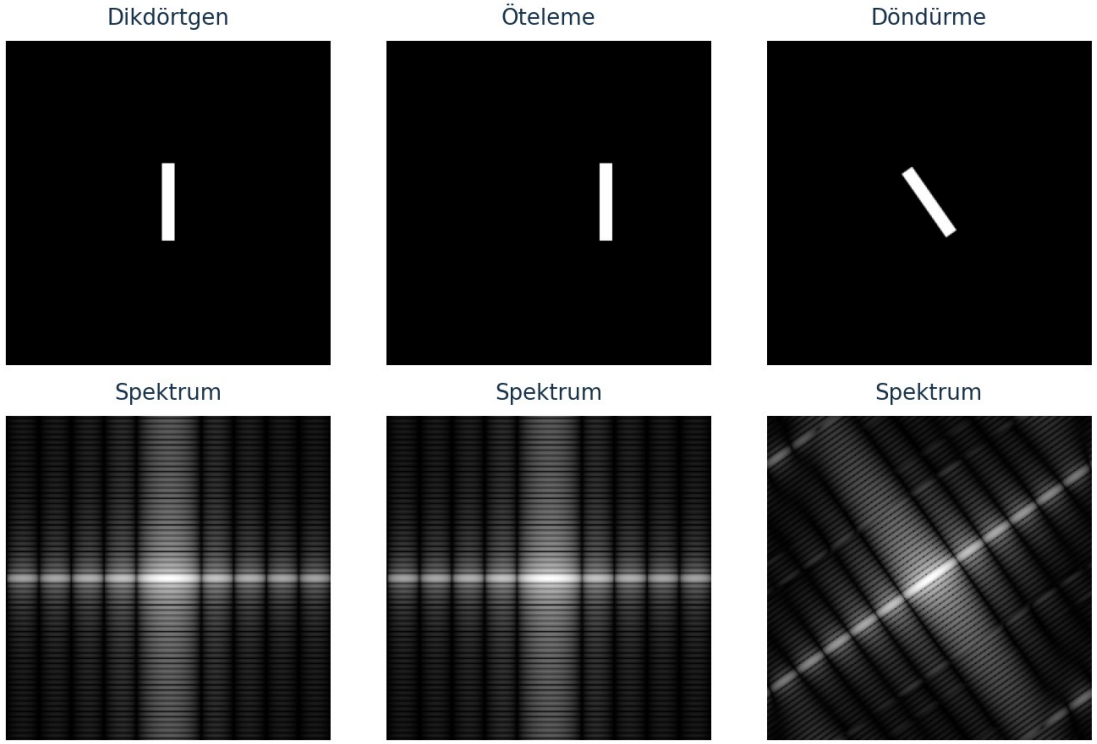
Kaynak: Eş. (4-86)–(4-93), s. 249–253

Öteleme, döndürme ve simetri

$$f(x - x_0, y - y_0) \leftrightarrow F(u, v)e^{-\mathrm{j}2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$$

$$F(-u, -v) = F^*(u, v)$$

- Uzamsal öteleme spektrumun genliğini değiştirmez; fazı değiştirir.
- Görüntü döndürülürse spektrum aynı açıyla döner.
- Gerçek görüntülerin DFT'si eşlenik simetriktir.

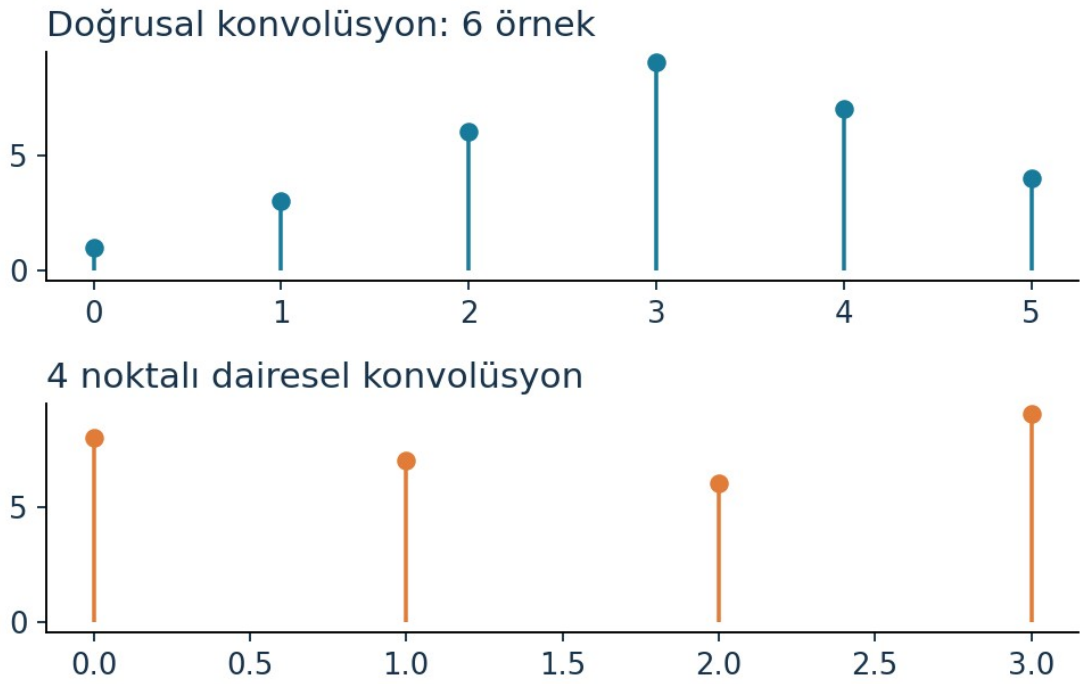


Kaynak: §4.6, s. 241–246, 250–251

Konvolüsyon, periyodiklik ve zero-padding

$$P \geq A + C - 1, \quad Q \geq B + D - 1$$

- DFT çarpımı, dolgulanmamış diziler için dairesel konvolüsyon üretir.
- Wraparound: sinyalin periyodik kopyaları birbirine karışır.
- Örnek: 4 ve 3 örnekli diziler için en az 6 noktalı DFT gerekir.



A×B görüntü ve C×D çekirdek: doğru doğrusal konvolüsyon için uygun dolgu.

BÖLÜM 4 / 03

Frekans alanında filtreleme

Spektrumu değiştirme, maskeler tasarlama ve uzamsal alana dönme.

Temel filtreleme denklemi

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$$

$$g(x,y) = \mathrm{Re}\{\mathcal{F}^{-1}[G(u,v)]\}$$

- F(u,v): giriş görüntüsünün Fourier dönüşümü.
- H(u,v): filtre transfer fonksiyonu.
- G(u,v): filtrelenmiş spektrum; g(x,y): ters dönüşümden elde edilen görüntü.
- H düşük frekansları geçirirse bulanıklaştırır; yüksek frekansları geçirirse ayrıntılar vurgulanır.

Kaynak: Eş. (4-104), s. 261

Frekans filtreleme: işlem akışı

01	→	02	→	03	→	04	→	05	→	06
Giriş		**Dolgu**		**DFT + merkezle**		**Maske çarpımı**		**IDFT + geri kaydır**		**Kırp**
$f(x,y)$		$P \times Q$		$F(u,v)$		$H \cdot F$		$g_p(x,y)$		$M \times N$

- Merkezlenmiş H ile merkezlenmiş F birlikte kullanılmalıdır.
- IDFT öncesinde frekans kaydırması geri alınır; sonuç giriş boyutuna kırpılır.

Kaynak: §4.7, s. 266–268

Uzamsal alan ve frekans alanı eşdeğerliği

$$h(x, y) \leftrightarrow H(u, v)$$

$$f * h \leftrightarrow FH$$

- Uzamsal çekirdek h(x,y) ile frekans transfer fonksiyonu H(u,v) dönüşüm çiftidir.
- Küçük çekirdeklerde uzamsal filtreleme çoğu zaman daha ekonomiktir.
- Büyük çekirdeklerde FFT tabanlı filtreleme önemli işlem avantajı sağlar.
- Gaussian fonksiyonun dönüşümü yine Gaussian'dır; genişlikler ters ilişkilidir.

Alçak geçiren filtreler (LPF)

$$D(u,v) = \sqrt{\left(u - \frac{P}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2}\right)^2}$$

- D(u,v): frekans dikdörtgeninin merkezine uzaklık.
- D_0: kesim frekansı parametresi.
- Yüksek frekanslar bastırılır; gürültü ve keskin detaylar azalır.



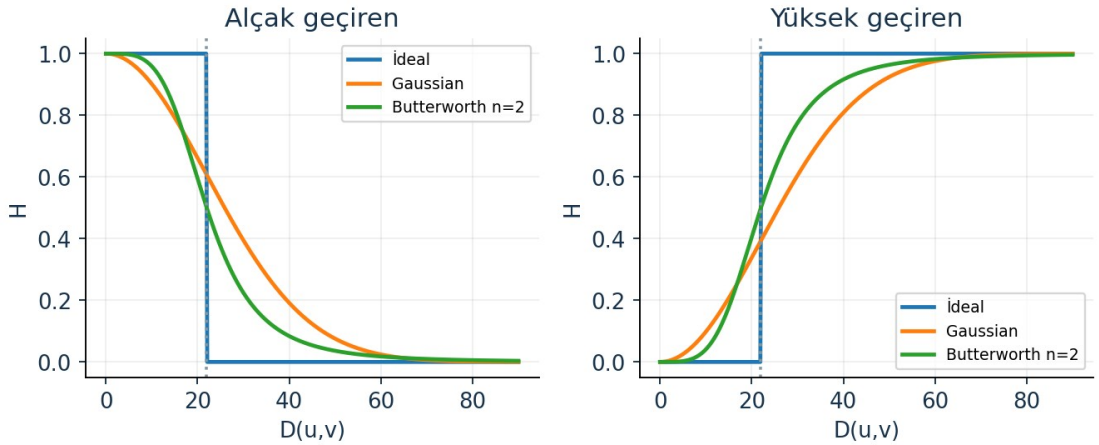
İdeal, Gaussian ve Butterworth LPF

$$H_{\mathrm{I}}(u,v) = \begin{cases} 1, & D(u,v) \le D_0, \\ 0, & D(u,v) > D_0. \end{cases}$$

$$H_{\mathrm{G}} = \exp\left(-\frac{D^2}{2D_0^2}\right)$$

$$H_{\mathrm{B}} = \frac{1}{1 + (D/D_0)^{2n}}$$

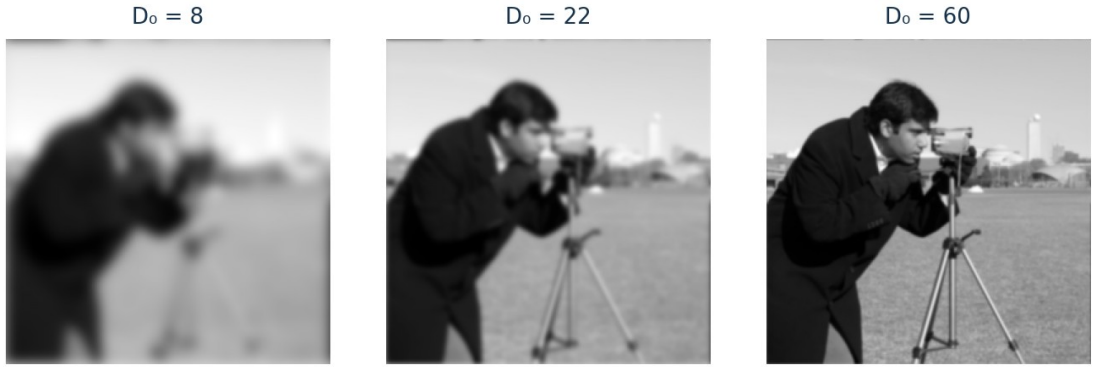
- İdeal: keskin geçiş; ringing oluşabilir.
- Gaussian: yumuşak geçiş, ringing oluşturmaz.
- Butterworth: n arttıkça ideal filtreye yaklaşır.



Kaynak: Eş. (4-111), (4-116), (4-117), s. 273–278

Kesim frekansı D_0 nasıl etkiler?

- D_0 küçük: güçlü bulanıklaştırma ve detay kaybı.
- D_0 büyük: daha çok yüksek frekans korunur.
- Aynı görüntü üzerinde farklı D_0 değerleri denenerek istenen denge seçilir.

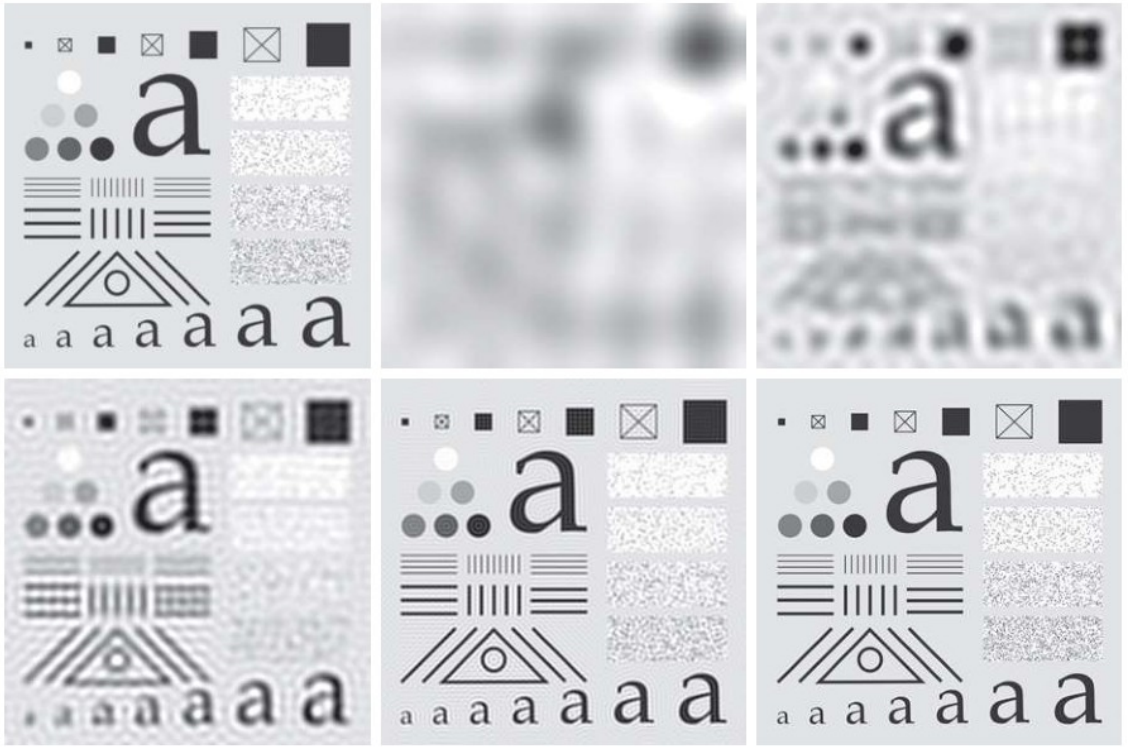


Gaussian LPF: D_0 arttığında görüntü orijinaline yaklaşır.

Kaynak: Örnek 4.16–4.17, s. 275–279

Ringing: ideal filtrenin yan etkisi

- Keskin frekans kesimi, uzamsal alanda salınımlı çekirdek oluşturur.
- Bu salınımlar özellikle keskin kenarların çevresinde görünür.
- Gaussian yumuşak frekans geçişiyle bu artefaktı önler.

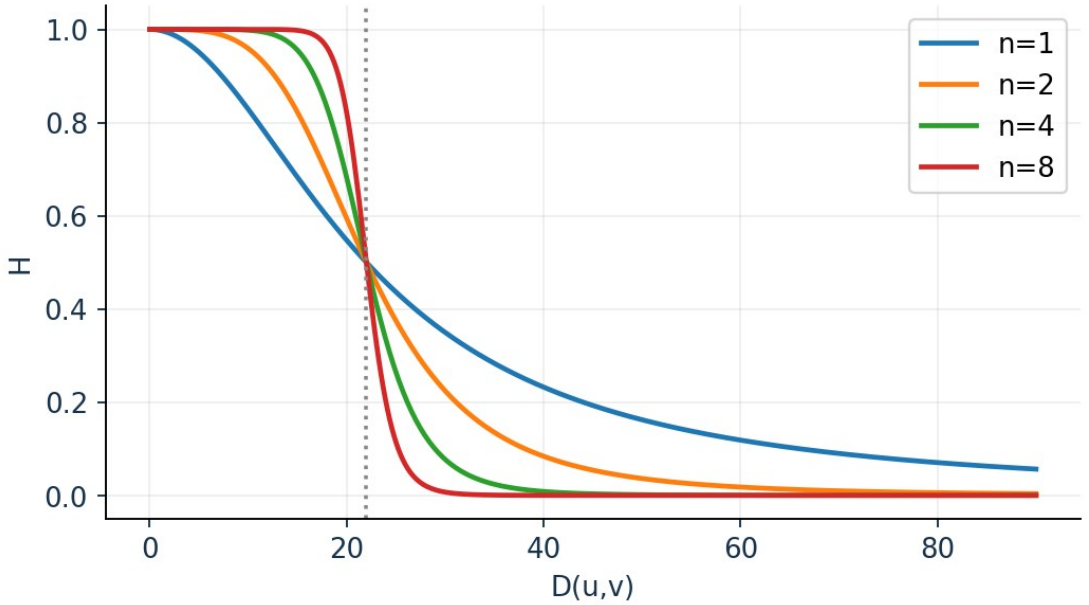


Kaynak görsel: Şekil 4.41 • farklı kesim frekansları

Kaynak: Şekil 4.41, s. 276

Butterworth derecesi n

- n=1: yumuşak geçiş.
- n büyüdükçe kesim daha keskin olur.
- Yüksek derecelerde ringing olasılığı artar.
- $D=D_0$ için Butterworth genliği 0.5’tir.



LPF sonuçlarını karşılaştıralım

- Aynı D_0 ve aynı görüntü ile üç filtreyi karşılaştırın.
- İdeal LPF keskin geçiş nedeniyle kenarlarda salınım oluşturabilir.
- Gaussian ve Butterworth geçişin yumuşaklığını kontrol etmeye imkân verir.



Özgün gösterim: D_0=22; Butterworth n=2

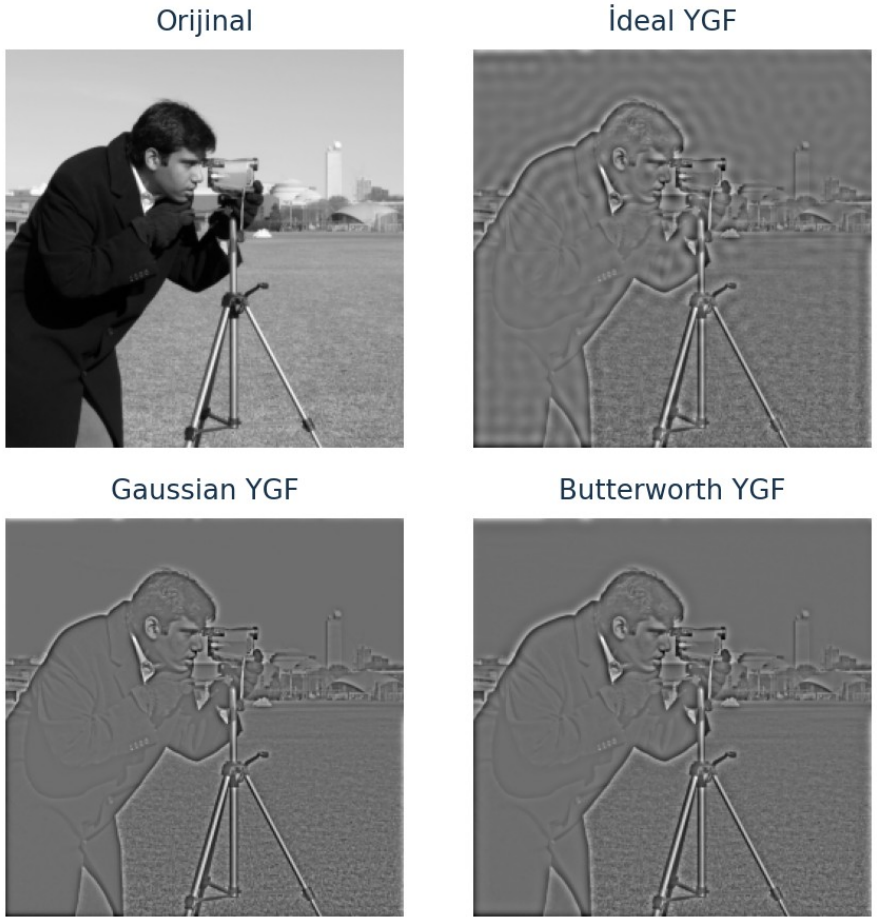
Yüksek geçiren filtreler (HPF)

$$H_{\mathrm{HP}} = 1 - H_{\mathrm{LP}}$$

$$H_{\mathrm{G}} = 1 - \exp\left(-\frac{D^2}{2D_0^2}\right)$$

$$H_{\mathrm{B}} = \frac{1}{1 + (D_0/D)^{2n}}$$

- Düşük frekanslar bastırılır; ani yoğunluk değişimleri vurgulanır.
- HPF çıktısı negatif değer içerebilir; gösterim için ölçekleme gerekir.
- HPF, tek başına tam görüntü keskinleştirme ile aynı değildir.



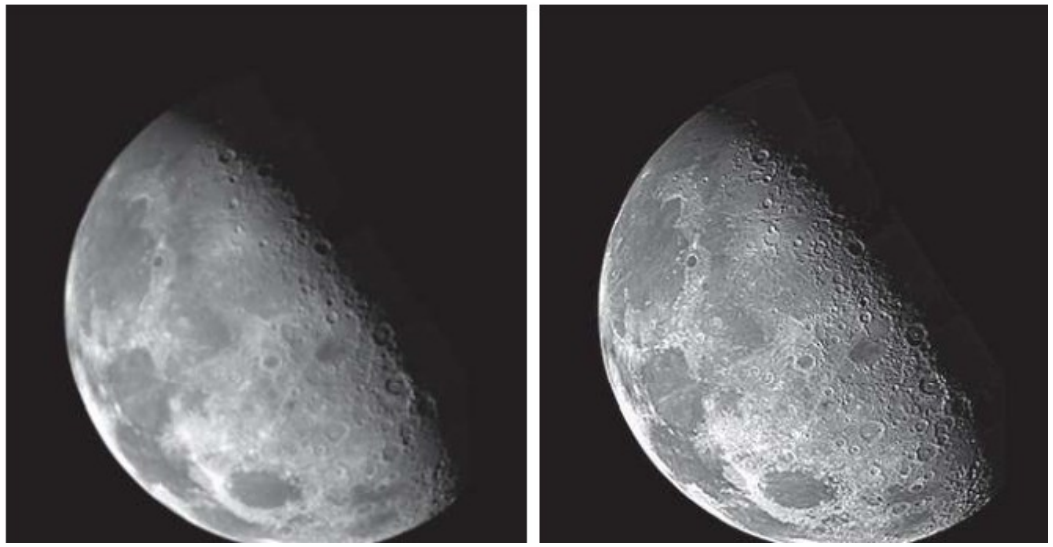
Kaynak: Eş. (4-118)–(4-121), s. 284–285

Laplacian ile frekans alanında keskinleştirme

$$H(u,v) = -4\pi^2 D^2$$

$$g = f - \nabla^2 f$$

- Laplacian ikinci türev temelli bir operatördür.
- Merkezlenmiş frekans koordinatlarında H, uzaklığın karesiyle değişir.
- Negatif Laplacian sonucunu orijinalden çıkararak kenarları güçlendirebiliriz.



Kaynak: Şekil 4.56 • ay görüntüsünde Laplacian keskinleştirme

Unsharp masking ve high-boost

$$g_{\text{mask}} = f - f_{\text{LP}}$$

$$g = f + k\, g_{\text{mask}}$$

$$H_{\text{HB}} = 1 + k H_{\text{HP}}$$

- Önce görüntünün bulanık kopyası çıkarılarak maske elde edilir.
- k=1: unsharp masking; k>1: high-boost.
- Orijinal görüntünün düşük frekansları korunurken detaylar güçlenir.



Homomorfik filtreleme

$$f = i\,r, \qquad \ln f = \ln i + \ln r$$

$$H = (\gamma_H - \gamma_L)\left[1 - \exp\left(-c\frac{D^2}{D_0^2}\right)\right] + \gamma_L$$

- Görüntü aydınlatma i(x,y) ve yansıma r(x,y) çarpımı olarak modellenir.
- Logaritma, çarpımı toplama dönüştürür.
- Düşük frekanslı aydınlatma azaltılır, yüksek frekanslı yansıma detayları güçlendirilir.
- IDFT ardından üstel dönüşüm uygulanır.

Bant geçiren ve bant durduran filtreler

$$H_{\mathrm{BR}}(u,v) = \begin{cases} 0, & |D - D_0| \le W/2, \\ 1, & |D - D_0| > W/2. \end{cases}$$

$$H_{\mathrm{BP}} = 1 - H_{\mathrm{BR}}$$

- Bant durduran (bandreject) filtre belirli bir frekans aralığını bastırır.
- Bant geçiren (bandpass) filtre yalnız seçilen frekans bandını geçirir.
- D_0: bant merkezi; W: bant genişliği.

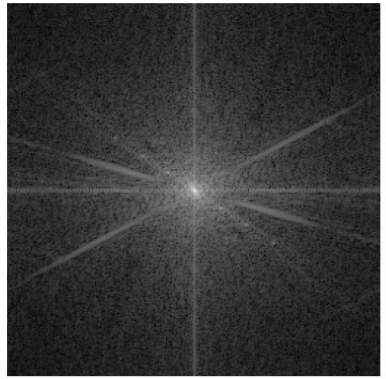
Notch filtre ile periyodik gürültü giderme

- Periyodik gürültü, spektrumda belirgin simetrik tepe noktaları oluşturur.
- Notch reject filtre sadece seçilen tepeleri bastırır.
- Gerçek görüntüde eşlenik simetriyi korumak için çiftler halinde tasarlanır.

Periyodik gürültü



Spektrum



Notch maskesi



Filtrelenmiş



Notch, geniş bir bandı yok etmek yerine dar frekans bölgelerini hedefler.

Kaynak: §4.10, s. 299–301; özgün deney

BÖLÜM 4 / 04

Hızlı Fourier Dönüşümü (FFT)

DFT’yi daha düşük işlem maliyetiyle hesaplamak.

2B DFT'nin ayrılabilirliği

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} e^{-\mathrm{j}2\pi ux/M} \left[\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-\mathrm{j}2\pi vy/N} \right]$$

- 2B DFT, ardışık iki 1B DFT ile hesaplanabilir.
- Önce her satırda, sonra her sütunda (veya tersi) dönüşüm uygulanır.
- MATLAB fft2 bu hesaplamayı verimli algoritmalarla gerçekleştirir.

Radix-2 FFT: çift/tek ayrıştırması

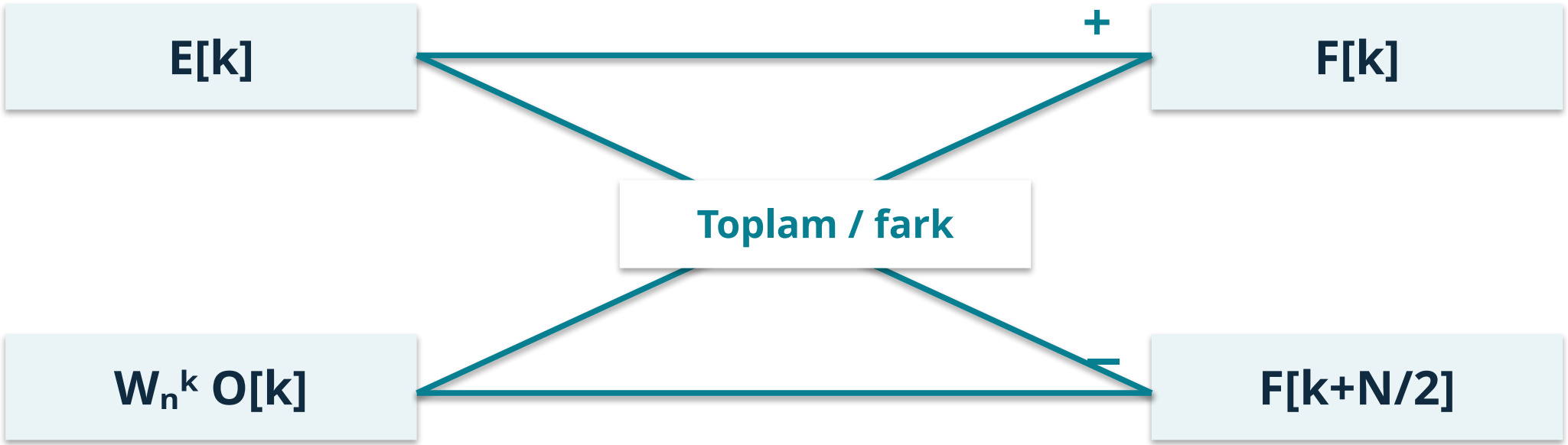
$$W_N = e^{-\mathrm{j}2\pi/N}$$

$$F[k] = E[k] + W_N^k O[k]$$

$$F\left[k + \frac{N}{2}\right] = E[k] - W_N^k O[k], \qquad 0 \le k < \frac{N}{2}$$

- $N=2^m$ için DFT, çift ve tek indeksli iki N/2 noktalı DFT'ye ayrılır.
- E[k] ve O[k]: çift ve tek örneklerin DFT'leri.
- Döndürme katsayısı W_n^k, iki küçük dönüşümün birleştirilmesinde kullanılır.

Butterfly işlemi: FFT’nin yapı taşı

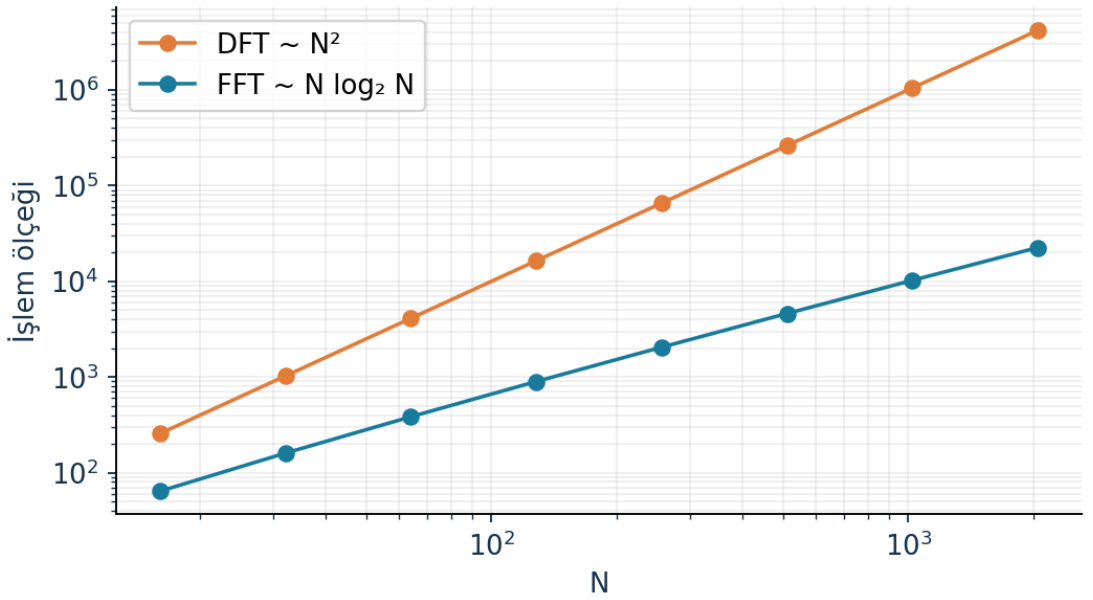


Bir çift girişten iki çıktı: toplam ve fark.

Kaynak: §4.11, s. 305–307; şematik gösterim

DFT ve FFT işlem maliyeti

- Doğrudan DFT: $O(N^2)$.
- Radix-2 FFT: $O(N \log_2 N)$.
- N=1024 için ölçek karşılaştırması: N^2=1.048.576, $N\log_2 N$=10.240.
- FFT farklı bir dönüşüm değil, DFT'yi hesaplayan hızlı algoritmadır.



BÖLÜM 4 / 05

MATLAB laboratuvarı

Spektrum analizi, Gaussian filtre ve high-boost deneyleri.

SAYISAL GÖRÜNTÜ İŞLEME

MATLAB 1 | Fourier spektrumu

```
I = im2double(imread("cameraman.tif"));
F = fft2(I);
Fc = fftshift(F);
S = log(1 + abs(Fc));

figure;
subplot(1,2,1);
imshow(I); title("Giriş");
subplot(1,2,2);
imshow(S, []); title("Log spektrum");
```

UYGULAMA NOTLARI

- fft2: 2B DFT hesabı.
- fftshift: DC bileşenini merkeze taşır.
- abs ve log: spektrumun görünürlüğünü artırır.

MATLAB 2 | Gaussian LPF ve high-boost

```
I = im2double(imread("cameraman.tif"));
[M,N] = size(I); P=2*M; Q=2*N;
[u,v] = ndgrid(-P/2:P/2-1, ...
               -Q/2:Q/2-1);
D2 = u.^2 + v.^2; D0 = 30;
F = fftshift(fft2(I,P,Q));
H = exp(-D2/(2*D0^2));
G = H .* F;
J = real(ifft2(ifftshift(G)));
J = J(1:M,1:N);
K = I + 1.5*(I-J);
figure; imshowpair(I,J,"montage");
figure; imshowpair(I,K,"montage");
```

UYGULAMA NOTLARI

- P×Q zero-padding, dönüşüm boyutunu belirler.
- H.*F: eleman bazında çarpım.
- D_0 değiştirerek LPF etkisini inceleyin.
- K: high-boost çıktısı; gerekirse aralığı [0,1] ile sınırlandırın.

MATLAB 3 | İdeal / Gaussian / Butterworth

```
% Önceki slayttaki D2 ve F kullanılır
D = sqrt(D2); D0 = 30; n = 2;
Hi = double(D <= D0);
Hg = exp(-D2/(2*D0^2));
Hb = 1 ./ (1 + (D/D0).^(2*n));
filters = {Hi,Hg,Hb};
figure;
for k = 1:3
  J = real(ifft2(ifftshift( ...
      F .* filters{k})));
  subplot(1,3,k);
  imshow(J(1:M,1:N), []);
end
```

UYGULAMA NOTLARI

- Aynı kesim frekansında üç filtreyi kıyaslayın.
- n=1,2,4,8 için Butterworth sonucunu gözlemleyin.
- Ringing ve detay kaybını açıklayın.

Ders içi alıştırmalar

- 1) f=[2, 1, 0, 1] dizisinin 4 noktalı DFT’sini hesaplayın.
- 2) En yüksek frekansı 120 Hz olan bant sınırlı sinyal için örnekleme koşulunu bulun.
- 3) 256×256 görüntü ve 15×15 çekirdek için minimum padding boyutu nedir?
- 4) D_0 ve n parametrelerinin LPF sonucuna etkisini açıklayın.
- 5) Periyodik gürültüyü gidermek için hangi filtreyi seçersiniz?

Alıştırmaların kısa cevapları

- 1) F=[4, 2, 0, 2].
- 2) İdeal bant sınırlı koşulda $f_s > 240$ Hz.
- 3) P≥270, Q≥270.
- 4) D_0 arttıkça daha fazla detay korunur; n arttıkça Butterworth geçişi keskinleşir.
- 5) Spektrumdaki gürültü tepelerine eşlenik simetrik notch reject filtre uygulanır.

Özet: frekans alanında düşünmek

- DFT görüntüdeki uzamsal frekans bileşenlerini gösterir; IDFT görüntüyü geri oluşturur.
- Örnekleme ve padding, spektral aliasing ve dairesel konvolüsyon hataları açısından önemlidir.
- LPF yumuşatır; HPF detayları vurgular; notch seçici olarak gürültüyü bastırır.
- FFT, aynı DFT sonucunu daha verimli hesaplar.
- Kaynak: Yüklenen “Filtering in the Frequency Domain”, Bölüm 4, s. 203–308.